Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Методичні вказівки
до практичних робіт
з дисципліни «Інтроскопія біооб’єктів та методи відображення біоінформації»
для студентів радіотехнічного факультету

Рекомендовано вченою радою радіотехнічного факультету

Київ
НТУУ «КПІ»
2013

Метод. вказівки до практичних. робіт з дисципліни «Інтроскопія біооб'єктів та методи відображення біоінформації» для студ. радіотехнічного ф-ту / Уклад.: О.І. Рибін, І.О. Сушко, - К.: НТУУ "КПІ", 2013. – 43 с.

Гриф надано вченою радою радіотехнічного факультету НТУУ "КПІ"
(Протокол № _____ від _____ 2013р.)

Рекомендовано навчально-методичною комісією радіотехнічного факультету
(Протокол № _____ від _____ 2013р.)

Навчальне видання

Методичні вказівки
до практичних робіт
з дисципліни «Інтроскопія біооб'єктів та методи відображення біоінформації»
для студентів радіотехнічного факультету

Укладачі *Рибін Олександр Іванович, д.т.н., проф.*
Сушко Ірина Олександрівна, асистент

Відповідальний редактор *Антипенко Руслан Володимирович, канд. техн. наук, доц.*

Рецензент *Адаменко Юлія Федорівна, к.т.н.*

За редакцією укладачів

НТУУ «КПІ»
Радіотехнічний факультет
03056, Київ, вул..Політехнічна, 12, корп. 17
Тел./факс (044) 454-92-93

ЗМІСТ

Практична робота №1 4

Практична робота №2 7

Практична робота №3 10

Практична робота №4 15

Практична робота №5 23

Практична робота №6-7 28

Практична робота №8-9 32

Список рекомендованої літератури 40

Практичне заняття №1

Мета: закріпити теоретичні знання відносно перетворення Фур'є. Знаходження спектрів дискретних сигналів. Знаходження згортки дискретних сигналів.

Питання, що підлягають розгляду на практичному занятті:

1. Неперервне перетворення Фур'є.
2. Дискретне перетворення Фур'є. Пряме та зворотне.
3. Побудова матричного оператора перетворення Фур'є на прикладі 4-го та 6-го порядків.
4. Доведення властивості ортогональності перетворення Фур'є на прикладі матричних операторів перетворення 4-го та 6-го порядків.
5. Знаходження фільтрованої проекції з використанням оператора згортки з дискретними відліками проекції.
6. Знаходження спектру дискретного сигналу.
7. Відновлення сигналу за його спектром.

Вихідні данні (теоретичні відомості)

Дискретне перетворення Фур'є

Дискретне перетворення Фур'є можна отримати із відомих функціоналів аналітичного прямого і зворотного перетворень

$$S(j\omega)= F\{s(t)\}= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-j\omega t}dt, \qquad (1a)$$

$$s(t)= F^{-1}\{S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega. \qquad (1б)$$

При цьому час t замінюється на дискретні відліки $n\Delta t$, довжина періоду $T=N\Delta t$. Тоді частота $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{N\Delta t}$; $\omega_k= 2\pi/N\Delta t$, а комплексне ядро перетворення $e^{-j\omega t}$ замінимо на $e^{-j\left(\frac{2\pi}{N\Delta t}\right)kn\Delta t} \rightarrow e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}$ (при цьому має місце нормування часу $\Delta t = 1$ та частоти Ω_1=2π/N). Отже оператори прямого та зворотного дискретного перетворення Фур'є мають вигляд

$$S_\omega(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s_t(n)e^{-j(2\pi/N)kn}; \qquad (2a)$$

$$s_t(n)= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} S_\omega(k)e^{j(2\pi/N)kn}. \qquad (2б)$$

В виразах (2) враховано, що формати перетворень (кількість дискретних відліків у часі і дискретних частот) співпадають і дорівнюють

$N=2^m$; m – ціле число. Звичайно (залежно від розв'язуваної задачі) N≥ 32 і може досягати значень 1024…2048 і т.д. В матричній формі запису оператори прямого та зворотного перетворення Фур'є мають вигляд

$$\bar{S}_\omega\ F(m) = \bar{\bar{F}}(m,n)\times\bar{s}_t(n), \qquad (3a)$$

де $\bar{\bar{F}}(m,n)=$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j(\frac{2\pi}{N})\times1\times1} & e^{-j(\frac{2\pi}{N})\times2\times1} & \cdots & e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\times(N-1)\times1} \\ 1 & e^{-j(\frac{2\pi}{N})\times1\times2} & e^{-j(\frac{2\pi}{N})\times2\times2} & \cdots & e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\times(N-1)\times2} \\ \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1 & e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\times1\times(N-1)} & e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\times2\times(N-1)} & \cdots & e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\times(N-1)\times(N-1)} \end{matrix}$$

$\bar{s}_t^T\ (n)=$

$$s_t(0)\quad s_t(1)\quad s_t(2)\quad \dots\dots\quad s_t(N-1)\quad ,$$

$\bar{S}_\omega^T\ (m)=$

$$S_\omega(0)\quad S_\omega(1)\quad S_\omega(2)\quad \dots\dots\quad S_\omega(N-1)$$

Тут T — знак транспонування.

Для зворотного перетворення Фур'є

$$\bar{s}_t(n)=\bar{\bar{F}}^{T*}(n,m)\times\bar{S}_\omega(m) \qquad (3б)$$

матричний дискретний оператор зворотного перетворення Фур'є має вигляд

$\bar{\bar{F}}^{T*}(n,m)\times N =$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \dots\dots & 1 \\ 1 & e^{j(\frac{2\pi}{N})\times1\times1} & e^{j(\frac{2\pi}{N})\times1\times2} & \dots\dots & e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\times1\times(N-1)} \\ 1 & e^{j(\frac{2\pi}{N})\times2\times1} & e^{j(\frac{2\pi}{N})\times2\times2} & \dots\dots & e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\times2\times(N-1)} \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1 & e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\times(N-1)\times1} & e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\times(N-1)\times2} & \dots\dots & e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\times(N-1)\times(N-1)} \end{matrix},$$

де $*$ — знак комплексного спряження.

Дискрет

не перетворення Фур'є, внаслідок простоти обчислення (особливо при використанні алгоритмів швидкого перетворення) знайшло широке використання при розв'язанні диференційних рівнянь динамічної рівноваги лінійних систем.

Так, якщо на вхід лінійної системи з функцією системи $K(j\omega)$ надходить сигнал $s(t)$, то для обчислення реакції системи $x(t)$ слід дискретизувати сигнал $s(t) \rightarrow s_t(n)$, дискретизувати (або обчислити по точках) коефіцієнт передачі $K(j\omega) \rightarrow K(k)$, знайти пряме дискретне перетворення Фур'є сигналу $s_t(n) \rightarrow S_\omega(k)$ і знайти дискретний спектр реакції

$$X_\omega(k)=S_\omega(k)\times K(k). \tag{4}$$

Далі по спектру $X_\omega(k)$ знайти дискретні відліки реакції

$$\bar{X}_t=\frac{1}{N}\bar{\bar{F}}^*\times\bar{X}_\omega. \tag{5}$$

В натуральних координатах та сама процедура, на перший погляд, має меншу кількість операцій, бо по імпульсній характеристиці $g(t)$, систему, яку знаходять як зворотне перетворення Фур'є від функції $K(k)$

$$\bar{g}_t=\frac{1}{N}\bar{\bar{F}}^*\times\bar{K} \tag{6}$$

за формулою (4), (5), що реалізує дискретну згортку, можна обчислити реакцію кола

$$\bar{x}_t=\bar{\bar{G}}\times\bar{s}_t,$$

але зворотну задачу (пошук $\bar{s}_t$ по $\bar{x}_t$, $\bar{\bar{G}}$) можна легшее розв'язати в області перетворення Фур'є, тому що в натуральних координатах для цього потрібно обернути матрицю $\bar{\bar{G}}$, в той час як для спектрів таке обернення виконується значно простіше.

Справді, вираз (4) в матричному вигляді можна записати як

$$\bar{X}_\omega=\bar{\bar{K}}\times\bar{S}_\omega, \tag{7}$$

де $\bar{\bar{K}}$ — діагональна матриця значень $K(k)$.

Тому, для отримання матриці зворотної до $\bar{\bar{K}}$, необхідно знайти зворотні величини елементів діагоналі і обчислити спектр вихідного сигналу

$$\bar{S}_\omega=\bar{\bar{K}}^{-1}\times\bar{X}_\omega \tag{8}$$

Часто це буває значно простіше, ніж розв'язувати задачі реставрації в натуральних координатах.

Практичне заняття №2

Мета: закріпити теоретичні знання відносно перетворення Адамара. Знаходження спектрів дискретних сигналів. Відновлення сигналів.

Питання, що підлягають розгляду на практичному занятті:

1. Перетворення Адамара. Пряме та зворотне.
2. Матричний оператор перетворення Адамара на прикладі перетворення 8-го та 16-го порядків.
3. Доведення властивості ортогональності перетворення Адамара на прикладі перетворення 8-го та 16-го порядків.
4. Знаходження спектрів сигналів.
5. Відновлення сигналів за їх спектрами.

Вихідні данні (теоретичні відомості)

Розрізняють неперервне та дискретне перетворення Уолша. В залежності від впорядкування трансформант (елементарних функцій за якими проводиться розклад функції в ряд Уолша), тобто їх нумерації, розділяють перетворення Уолша-Корчмаржа, Уолша-Пейлі та Уолша-Адамара.

Існують алгоритми перенумерації трансформант цих перетворень, тому більш детально розглянемо найзручніше для формування і подальшого використання в математичних операціях над функціями перетворення Уолша-Адамара (або просто Адамара).

Позначимо функцію Адамара *w(n,t)*, де *n* – номер функції (трансформанти), *t* – час в інтервалі періоду (функція періодична, період *T* = 1).

В такому разі будь-яку періодичну функцію *s*(*t*) можна представити на періоді рядом

$$s(t) = \sum_{n=0}^{N-1} H_n \times w(n,t), \qquad (1)$$

де H_n – «амплітуда» (ваговий коефіцієнт) функції *w(n,t)*, яка обчислюється за формулою

$$H_n = \int_0^1 s(t) \times w(n,t)dt \qquad (2)$$

Після дискретизації сигналу $s(t)$ і функції $w(n,t)$ з кроком Δt на періоді $T = \Delta t \times N$ одержимо матричний оператор перетворення Адамара $\bar{\bar{W}}$, який перетворює дискретні відліки сигналу s_t в дискретні трансформанти з амплітудами H_n

$$\bar{H} = \bar{\bar{W}} \times \bar{S}_t. \qquad (3)$$

Якщо дискретний матричний оператор $\bar{\bar{F}}$ перетворення Фур'є було отримано з неперервного перетворення, то у випадку перетворення Адамара зручніше спочатку отримати матричний оператор $\bar{\bar{W}}$, за яким можна отримати трансформанти Адамара неперервного перетворення.

Базовою для формування матриці Адамара є матриця другого порядку

$$\bar{\bar{W}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (4a)$$

та Кронекерів множник $\bar{\bar{M}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. (4*б*)

Кронекерів добуток матриць (операцію множення позначають знаком $\otimes$) – це такий добуток, коли кожна матриця $\bar{\bar{W}}$ множиться окремо на елементи множника, тобто

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \bar{\bar{w}}_4 \qquad (5a)$$

і порядок матриці $\bar{\bar{W}}$ подвоюється.

Так само далі

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \bar{\bar{W}}_8 \qquad (5б)$$

і т.д.

За цим простим алгоритмом формують матрицю дискретного перетворення Адамара будь-якого порядку $N = 2^n$, n – ціле число.

Побудуємо далі за матрицею $\bar{\bar{W}}_8$ трансформанти неперервного перетворення Адамара. При цьому будемо враховувати, що кожен відлік ±1 в рядку матриці, який відповідає відліку неперервної трансформанти належить відповідній точці $k\Delta t$ на осі часу (k – номер стовпця матриці $\bar{\bar{W}}$, нумерація стовпців з k=0,1,2,…,N-1). Інтервал між точками k та k+1 (виключаючи k+1) має значення трансформанти в точці k.

Тоді функції *w(0,t),…w(7,t)* мають вигляд рис.1.

У відповідності до (3) зворотне дискретне перетворення Уолша-Адамара має вигляду

$$\bar{s}_t = \overline{\overline{W}}^{-1} \times \bar{H}, \tag{6}$$

де зворотна матриця

$$\overline{\overline{W}}^{-1} = \frac{1}{N} \times \overline{\overline{W}}. \tag{7}$$

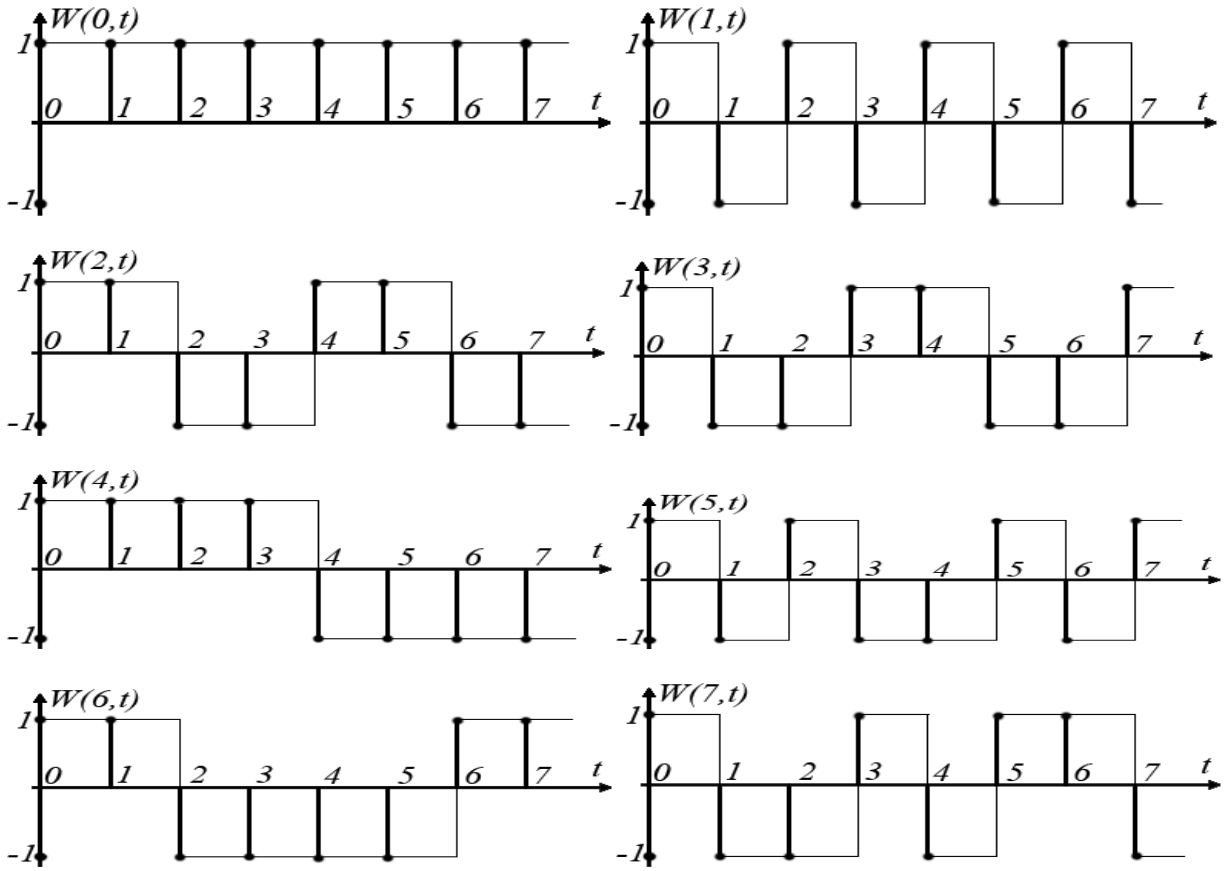


Рис.1. Функції Уолша-Адамара.

Практичне заняття №3

Мета: закріпити теоретичні знання відносно косинусного перетворення. Знаходження спектрів дискретних сигналів. Відновлення сигналів.

Питання, що підлягають розгляду на практичному занятті:

1. Косинусне перетворення. Пряме та зворотне.
2. Матричний оператор косинусного перетворення на прикладі перетворення 4-го та 6-го порядків.
3. Доведення властивості ортогональності косинусного перетворення на прикладі перетворення 4-го та 6-го порядків.
4. Знаходження спектрів сигналів.
5. Відновлення сигналів за їх спектрами.

Вихідні данні (теоретичні відомості)

Косинусне перетворення

Останні роки широкого поширення при аналізі біосигналів набуло косинусне перетворення, що привело навіть до випуску спеціалізованих косинусних процесорів. Саме косинусне перетворення вперше запропоновано в роботі і базується на уявному розмноженні досліджуваного сигналу осесиметричною парою. Трансформанти косинусного перетворення мають період π, а їх вигляд (для перших чотирьох трансформант) наведено на рис.1.

Як видно з рис.1, усі непарні (за номером) трансформанти косинусного перетворення мають стрибки на початку періоду, а всі парні – таких стрибків не мають.

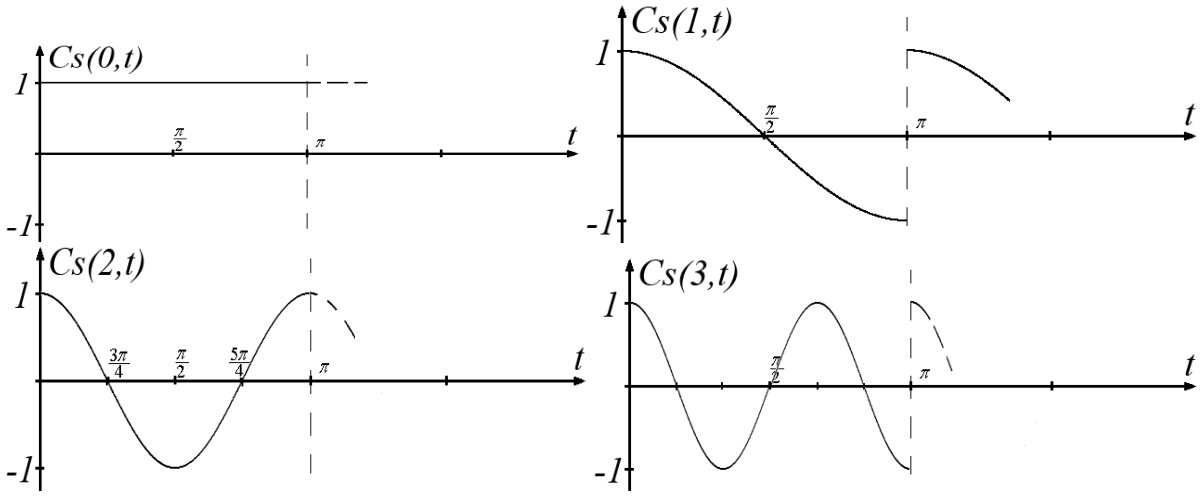


Рис.1. Трансформанти косинусного перетворення *Cs(n,t)*

Косинусний ряд неперервного перетворення можна подати у вигляді

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} S_{\omega n} \times Cs(n,t), \qquad (1\ a)$$

де $S_{\omega n}$ – амплітуда косинусної трансформанти, яку обчислюємо за формулою

$$S_{\omega n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} s(t) \times Cs(n,t)dt. \qquad (1б)$$

Для демонстрації отримання матричного оператора косинусного перетворення розглянемо першу трансформанту *Cs(*1,*t)* на рис.1.7

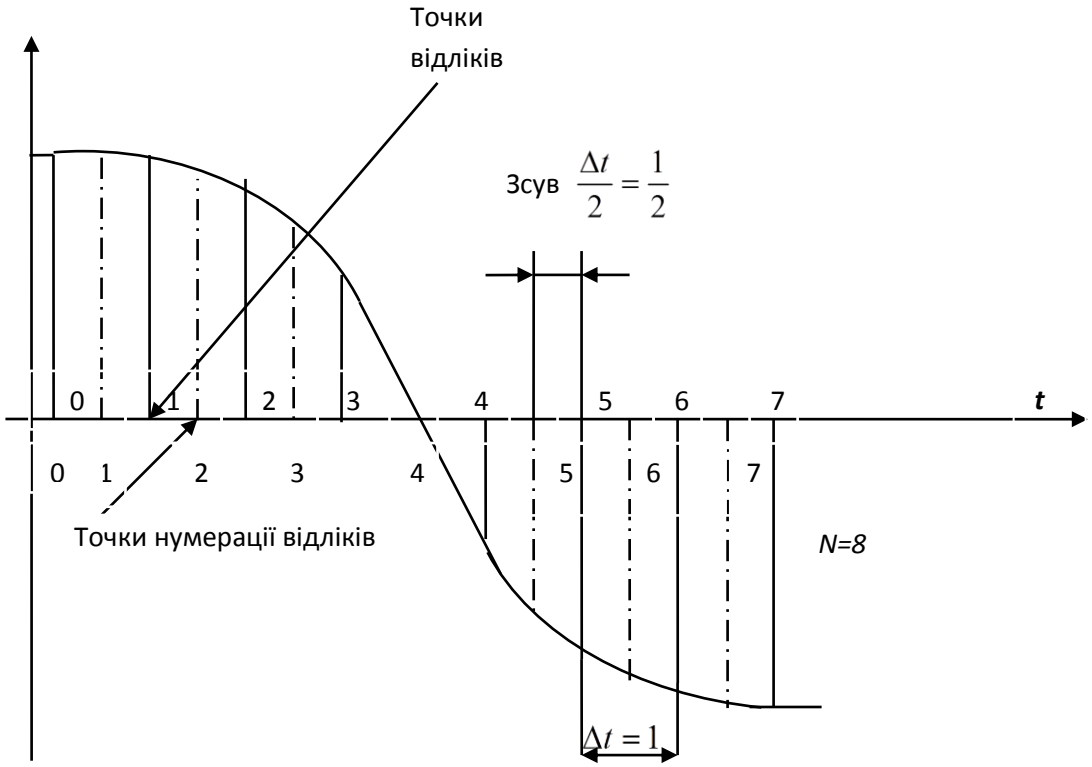


Рис.2

Неперервними вертикальними лініями (формат дискретного перетворення $N = 8$) позначено ті значення відліків, які беруть для дискретного перетворення Фур'є або Уолша. Але при такій дискретизації функція *Cs(n,k)* не має нульового середнього (відлік в точці 0 не компенсується, усі інші відліки компенсуються попарно). Тому хоча б для функції *Cs(0,k)* трансформанта *Cs(*1,*k)* буде неортогональною (не виконується умова (1.31*a*). Умова ортогональності не виконується тоді і для усіх інших пар трансформант (крім парних).

Тому для забезпечення ортогональності відліків усіх трансформант ці відліки з «точок відліків» потрібно посунути на інтервал $\pi/2N$ (при

інтервалі дискретизації π/N) в «точки нумерації відліків». Тоді матричний оператор прямого дискретного ортогонального косинусного перетворення наприклад, для N= 6 матиме вигляд

$$\overline{\overline{Cs}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos\frac{\pi}{12} & \cos\frac{3\pi}{12} & \cos\frac{5\pi}{12} & \cos\frac{7\pi}{12} & \cos\frac{9\pi}{12} & \cos\frac{11\pi}{12} \\ \cos\frac{2\pi}{12} & \cos\frac{6\pi}{12} & \cos\frac{10\pi}{12} & \cos\frac{14\pi}{12} & \cos\frac{18\pi}{12} & \cos\frac{22\pi}{12} \\ \cos\frac{3\pi}{12} & \cos\frac{9\pi}{12} & \cos\frac{15\pi}{12} & \cos\frac{21\pi}{12} & \cos\frac{27\pi}{12} & \cos\frac{33\pi}{12} \\ \cos\frac{4\pi}{12} & \cos\frac{12\pi}{12} & \cos\frac{20\pi}{12} & \cos\frac{28\pi}{12} & \cos\frac{36\pi}{12} & \cos\frac{44\pi}{12} \\ \cos\frac{5\pi}{12} & \cos\frac{15\pi}{12} & \cos\frac{25\pi}{12} & \cos\frac{35\pi}{12} & \cos\frac{45\pi}{12} & \cos\frac{55\pi}{12} \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Для пошуку матричного оператора зворотного косинусного перетворення скористаємося умовою ортогональності (1a) для усіх пар рядків (пар дискретних трансформант), для чого обчислимо добуток

$$\overline{\overline{Cs}} \times \overline{\overline{Cs}}^T = Diag\{\varepsilon^2\}, \qquad (3)$$

де T – знак трансформування; $Diag\{.\}$– діагональна матриця, причому в діагоналі матриці в (3) одержимо енергії ε^2 за період для і–х дискретних трансформант. При цьому ε_0= N, а ε_i^2 ($i \neq 0$) = $N/2$.

Тому оператор зворотного косинусного перетворення матиме для формату N=6 вигляд

$$\overline{\overline{Cs}}^{-1} = \frac{2}{6}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \cos\frac{\pi}{12} & \cos\frac{2\pi}{12} & \cos\frac{3\pi}{12} & \cos\frac{4\pi}{12} & \cos\frac{5\pi}{12} \\ \frac{1}{2} & \cos\frac{3\pi}{12} & \cos\frac{6\pi}{12} & \cos\frac{9\pi}{12} & \cos\frac{12\pi}{12} & \cos\frac{15\pi}{12} \\ \frac{1}{2} & \cos\frac{5\pi}{12} & \cos\frac{10\pi}{12} & \cos\frac{15\pi}{12} & \cos\frac{20\pi}{12} & \cos\frac{25\pi}{12} \\ \frac{1}{2} & \cos\frac{7\pi}{12} & \cos\frac{14\pi}{12} & \cos\frac{21\pi}{12} & \cos\frac{28\pi}{12} & \cos\frac{35\pi}{12} \\ \frac{1}{2} & \cos\frac{9\pi}{12} & \cos\frac{18\pi}{12} & \cos\frac{27\pi}{12} & \cos\frac{36\pi}{12} & \cos\frac{45\pi}{12} \\ \frac{1}{2} & \cos\frac{11\pi}{12} & \cos\frac{22\pi}{12} & \cos\frac{33\pi}{12} & \cos\frac{44\pi}{12} & \cos\frac{55\pi}{12} \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Узагальнюючи отриманий результат, можна сказати, що матриця зворотного косинусного перетворення є транспонованою матрицею прямого

перетворення, помноженого на множник $2/N$, в якій перший стовпець містить замість одиниць значення $1/2$.

Такий, відносно складний порядок формування матриці зворотного перетворення пов'язаний з тим, що матриця $\overline{\overline{Cs}}$ є несиметричною відносно головної діагоналі.

Існує велика кількість ортогональних перетворень із несиметричним матричним оператором, до того ж таких, що ε_i^2 в матриці $Diag\{.\}$ в (3) є різними. Оскільки ці значення ще й залежать від формату N, то в загальному випадку слід використовувати процедуру нормування прямого та зворотного перетворення. Для цього після обчислення ε_i^2 в (3) поділимо кожний i-й рядок матриці прямого перетворення на $\varepsilon_i = \sqrt{\varepsilon_i^2}$. Отримаємо, наприклад, матрицю $\overline{\overline{C}}_{SH}$.

Тоді

$$\overline{\overline{Cs}}_H \times \overline{\overline{Cs}}_H^T = \overline{\overline{E}}, \qquad (4a)$$

де $\overline{\overline{E}}$ – одинична матриця.

Але, оскільки вірне рівняння (4а), то вірно також

$$\overline{\overline{Cs}}_H^T = \overline{\overline{Cs}}_H^{-1}. \qquad (4б)$$

Матриця $\overline{\overline{Cs}}_H^T$ для N = 6 матиме вигляд

$$\overline{\overline{C}}_{SH}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{2\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{3\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{4\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{5\pi}{12} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{3\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{6\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{9\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{12\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{15\pi}{12} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{5\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{10\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{15\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{20\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{25\pi}{12} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{7\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{14\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{21\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{28\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{35\pi}{12} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{9\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{18\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{27\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{36\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{45\pi}{12} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{11\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{22\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{33\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{44\pi}{12} & \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{55\pi}{12} \end{bmatrix}. \qquad (5a)$$

Вираз (4б) можна записати інакше, якщо вважати рядки матриці $\overline{\overline{Cs}}_H^{-1}$відліками деяких нових трансформант. Тоді (4*б*) можна записати у вигляді

$$\overline{\overline{CCs}}_H \times \overline{\overline{CCs}}_H^T, \qquad (5б)$$

де $\overline{\overline{CCs}}_H = \overline{\overline{Cs}}_H^{-1}$, $\overline{\overline{CCs}}_H^T = \overline{\overline{Cs}}_H$.

При цьому (згідно з (5*б*)) рядки матриці $\overline{\overline{CCs}}_H$ містять відліки ортогональних функцій, тобто для несиметричного матричного оператора завжди можна знайти споріднену систему ортогональних перетворень, відмінну від вихідної. Так, період косинусних функцій в рядках матриці (5*а*) становить $\pi/2$. Крім того, відліки беруться із початку періоду без зсуву. Оскільки нормований косинус в кожному рядку в першому за номером стовпці (нумерацію тут доцільно розглядати не з нуля, а з одиниці), має вигляд $(1/\sqrt{3})\cos(0)= 1/\sqrt{3}$, то записавши

$$\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + (\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}}),$$

отримаємо ряд косинусів із непарними номерами з δ-функціями з площею $(\frac{1}{\sqrt{N}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{N}{2}}})$. Першу трансформанту дискретного перетворення (без δ-функції) наведено на рис 3.

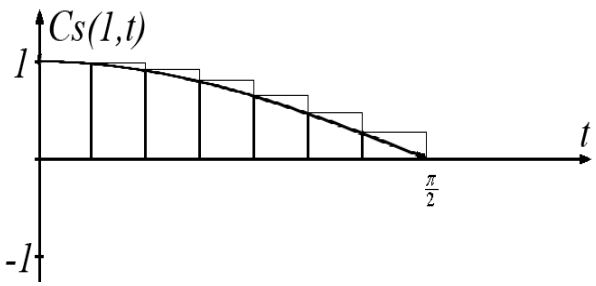


Рис.3

Аналогічно можна побудувати усі інші трансформанти.

<u>Практичне заняття №4</u>

Мета: закріпити теоретичні знання відносно нормального перетворення. Знаходження спектрів дискретних сигналів. Відновлення сигналів.

Питання, що підлягають розгляду на практичному занятті:

1. Нормальне перетворення. Пряме та зворотне.
2. Матричний оператор нормального перетворення на прикладі перетворення 4-го порядку.
3. Доведення властивості ортогональності нормального перетворення на прикладі перетворення 4-го порядку.
4. Знаходження спектрів сигналів.
5. Відновлення сигналів за їх спектрами.

<u>Вихідні данні (теоретичні відомості)</u>

Нормальне одновимірне перетворення

Розглянемо можливість створення дискретного ортогонального перетворення, для якого одна із трансформант збігалася б з наперед заданим дискретним сигналом довільної форми, а, отже, спектр такого перетворення містив би лише одну ненульову складову. Таке ортогональне перетворення у подальшому будемо називати нормальним [9 – 13].

Матричний оператор дискретного нормального перетворення першого виду

Для визначеності й наочності ілюстрації процедури побудови нормального перетворення виберемо формат перетворення N рівним восьми (що дозволить надалі узагальнити отриманий результат на довільний формат $N=2^n$, де n – ціле додатне число). Формат перетворення і формат сигналу збігаються. Тому нехай сигнал $x(t)$ на періоді, рівному тривалості сигналу, задано вектором відліків $\overline{X_0}=[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$, де T – знак транспонування. Для формату N=8 $\overline{X_0}=[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8]^T$.

Для одержання нормального перетворення сигналу $\overline{X_0}$ проведемо ряд перетворень, при кожному з яких кількість ненульових трансформант у порівнянні з вихідним сигналом буде зменшуватися вдвічі.

Першим з таких перетворень $\overline{\overline{W_1}}$ буде блочно-діагональна матриця, головна діагональ якої складається із блоків $\overline{\overline{W_1}}^{(i)}=\begin{bmatrix} x_{i+1} & x_{i+2} \\ -x_{i+2} & x_{i+1} \end{bmatrix}$.

Для формату N=8 ця матриця матиме вигляд

$\overline{\overline{W_1}} =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	x_1	x_2						
2	$-x_2$	x_1						
3			x_3	x_4				
4			$-x_4$	x_3				
5					x_5	x_6		
6					$-x_6$	x_5		
7							x_7	x_8
8							$-x_8$	x_7

Для забезпечення ортогональності рядків матриці $\overline{\overline{W_1}}$ достатньо забезпечити ортогональність лише кожної пари рядків: 1-го та 2-го, 3-го та 4-го, 5-го та 6-го і т.д., оскільки рядки 1 і 2 завжди ортогональні по відношенню до рядків 3, 4, 5, 6 тощо внаслідок того, що вони належать до різних блоків діагоналі матриці $\overline{\overline{W_1}}$.

Так, при перевірці на ортогональність першого рядка з другим та третього з четвертим, отримаємо скалярні добутки:

$$x_1(-x_2)+x_2x_1=0 \text{ і } x_3(-x_4)+x_4x_3=0.$$

У результаті перемноження матриці $\overline{\overline{W_1}}$ і вектора $\overline{X_0}$ одержимо стовпець першого (із серії) перетворення $\overline{X_1}=\overline{\overline{W_1}}\cdot\overline{X_0}$, де для N=8

$$\overline{X_1}=[(x_1{}^2+x_2{}^2),\ 0,\ (x_3{}^2+x_4{}^2),\ 0,\ (x_5{}^2+x_6{}^2),\ 0,\ (x_7{}^2+x_8{}^2),\ 0]^T.$$

Для забезпечення ортогональності кратного перетворення матрицю $\overline{\overline{W_1}}$ слід нормувати, для чого знайдемо добуток $\overline{\overline{W_1}}\cdot\overline{\overline{W_1}}^T=diag\{\overline{\overline{\varepsilon_1}}\}$, де $diag\{\overline{\overline{\varepsilon_1}}\}$ - діагональна матриця з елементами головної діагоналі $(x_1{}^2+x_2{}^2)$, $(x_1{}^2+x_2{}^2)$, $(x_3{}^2+x_4{}^2)$, $(x_3{}^2+x_4{}^2)$, $(x_5{}^2+x_6{}^2)$, $(x_5{}^2+x_6{}^2)$, $(x_7{}^2+x_8{}^2)$, $(x_7{}^2+x_8{}^2)$.

Поділивши рядки матриці $\overline{\overline{W_1}}$ на відповідні значення $(x_{i+1}{}^2+x_{i+2}{}^2)^{1/2}$

діагоналі, одержимо матрицю $\overline{\overline{W_{1N}}}$, таку, що $\overline{\overline{W_{1N}}} \cdot \overline{\overline{W_{1N}}}^T = \overline{\overline{W_{1N}}}^T \cdot \overline{\overline{W_{1N}}} = \overline{\overline{E}}$, де $\overline{\overline{E}}$ - одинична матриця. Для N=8 матриця $\overline{\overline{W_{1N}}}$ представляє собою:

$$\overline{\overline{W_{1N}}} = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & x_1/a & x_2/a & & & & & & \\ 2 & -x_2/a & x_1/a & & & & & & \\ 3 & & & x_3/b & x_4/b & & & & \\ 4 & & & -x_4/b & x_3/b & & & & \\ 5 & & & & & x_5/c & x_6/c & & \\ 6 & & & & & -x_6/c & x_5/c & & \\ 7 & & & & & & & x_7/d & x_8/d \\ 8 & & & & & & & -x_8/d & x_7/d \end{array}$$

де $a = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $b = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$, $c = \sqrt{x_5^2 + x_6^2}$, $d = \sqrt{x_7^2 + x_8^2}$.

Тоді частково нормалізований (із чотирма нульовими значеннями) спектр $\overline{X_{1N}} = \overline{\overline{W_{1N}}} \cdot \overline{X_0}$ має вигляд

$$\overline{X_{1N}} = [\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, 0, \sqrt{x_3^2 + x_4^2}, 0, \sqrt{x_5^2 + x_6^2}, 0, \sqrt{x_7^2 + x_8^2}, 0]^T .$$

Для перетворення ненульових значень сигналу $\overline{X_{1N}}$ побудуємо матрицю $\overline{\overline{W_2}}$, аналогічно тому, як це було зроблено для матриці $\overline{\overline{W_1}}$. Тобто друге перетворення $\overline{\overline{W_2}}$ являє собою матрицю, де елементи, номера рядків і стовпців яких відповідають ненульовим елементам вектора $\overline{X_{1N}}$, мають значення $w_{11} = w_{33} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $w_{13} = -w_{31} = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$, $w_{55} = w_{77} = \sqrt{x_5^2 + x_6^2}$, $w_{57} = -w_{75} = \sqrt{x_7^2 + x_8^2}$. Діагональні ж елементи, що відповідають нулям вектора $\overline{X_{1N}}$, у загальному випадку можна замінити

будь-якими числами, оскільки це не вплине на результат другого перетворення. Але залишити їх нульовими не можна, оскільки результуючу матрицю $\overline{\overline{W_{\Sigma N}}}$ нормального перетворення будемо одержувати перемноженням матриць всіх часткових перетворень $\overline{\overline{W_{iN}}}$. А $\overline{\overline{W_{\Sigma N}}}$ не повинна містити нульових рядків або(та) стовпців, оскільки при цьому матриця зворотного перетворення $\overline{\overline{W_{\Sigma N}}}^{-1}$ не існуватиме.

У даному випадку покладемо діагональні елементи матриці $\overline{\overline{W_2}}$, що відповідають нулям вектора $\overline{X_{1N}}$, рівними одиницям. Матричний оператор нормального перетворення, що спиратиметься на таку матрицю $\overline{\overline{W_2}}$ часткового перетворення назвемо матричним оператором першого виду.

$\overline{\overline{W_2}} =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$		$\sqrt{x_3^2 + x_4^2}$					
2		1						
3	$-\sqrt{x_3^2 + x_4^2}$		$\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$					
4				1				
5					$\sqrt{x_5^2 + x_6^2}$		$\sqrt{x_7^2 + x_8^2}$	
6						1		
7					$-\sqrt{x_7^2 + x_8^2}$		$\sqrt{x_5^2 + x_6^2}$	
8								1

Тепер спектр $\overline{X_2}$ другого часткового перетворення $\overline{\overline{W_2}} \cdot \overline{X_1} = \overline{X_2}$

$$\overline{X_2} = [(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2), 0, 0, 0, (x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2), 0, 0, 0]^T.$$

Пронормуємо $\overline{\overline{W_2}}$:

$$\overline{\overline{W_2}} \cdot \overline{\overline{W_2}}^T = Diag\{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2), 1, (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2), 1, (x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2), 1,$$

$$\left(x_5^{\ 2} + x_6^{\ 2} + x_7^{\ 2} + x_8^{\ 2}\right),\ 1,\}.$$

Тобто при нормуванні перший та третій рядки матриці $\overline{\overline{W_2}}$ слід розділити на $\alpha = \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} + x_4^{\ 2}}$, а п'ятий та сьомий відповідно на $\beta = \sqrt{x_5^{\ 2} + x_6^{\ 2} + x_7^{\ 2} + x_8^{\ 2}}$. Таким чином отримаємо нормовану матрицю $\overline{\overline{W_{2N}}}$

$\overline{\overline{W_{2N}}} =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\frac{\sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}}}{\alpha}$		$\frac{\sqrt{x_3^{\ 2} + x_4^{\ 2}}}{\alpha}$					
2		1						
3	$-\frac{\sqrt{x_3^{\ 2} + x_4^{\ 2}}}{\alpha}$		$\frac{\sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}}}{\alpha}$					
4				1				
5					$\frac{\sqrt{x_5^{\ 2} + x_6^{\ 2}}}{\beta}$		$\frac{\sqrt{x_7^{\ 2} + x_8^{\ 2}}}{\beta}$	
6						1		
7					$-\frac{\sqrt{x_7^{\ 2} + x_8^{\ 2}}}{\beta}$		$\frac{\sqrt{x_5^{\ 2} + x_6^{\ 2}}}{\beta}$	
8								1

Після відповідного нормування матриці другого перетворення одержимо вектор $\overline{X_{2N}}$, що містить ненульові елементи в першому рядку $x_{N2} = \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} + x_4^{\ 2}}$ і в п'ятому рядку $x_{N5} = \sqrt{x_5^{\ 2} + x_6^{\ 2} + x_7^{\ 2} + x_8^{\ 2}}$

$$\overline{X_{2N}} = [\sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} + x_4^{\ 2}}, 0, 0, 0, \sqrt{x_5^{\ 2} + x_6^{\ 2} + x_7^{\ 2} + x_8^{\ 2}}, 0, 0, 0]^T.$$

Для двох ненульових елементів, що залишилися, побудуємо матрицю $\overline{\overline{W_3}}$

1 2 3 4 5 6 7 8

$$\overline{\overline{W_3}} = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
1 & \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2} & & & & \sqrt{x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2} & & & \\
2 & & 1 & & & & & & \\
3 & & & 1 & & & & & \\
4 & & & & 1 & & & & \\
5 & -\sqrt{x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2} & & & & \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2} & & & \\
6 & & & & & & 1 & & \\
7 & & & & & & & 1 & \\
8 & & & & & & & & 1
\end{array}$$

$$\overline{\overline{W_3}} \cdot \overline{\overline{W_3}}^T = Diag\left\{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2\right),\ 1,\ 1,\ 1,\right.$$
$$\left.\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2\right),\ 1, 1,\ 1,\right\}.$$

Аналогічно до попередніх кроків, після нормування одержимо $\overline{\overline{W_{3N}}}$

$$\overline{\overline{W}}_{3N} = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
1 & \dfrac{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}}{A} & & & & \dfrac{\sqrt{x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2}}{A} & & & \\
2 & & 1 & & & & & & \\
3 & & & 1 & & & & & \\
4 & & & & 1 & & & & \\
5 & -\dfrac{\sqrt{x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2}}{A} & & & & \dfrac{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}}{A} & & & \\
6 & & & & & & 1 & & \\
7 & & & & & & & 1 &
\end{array}$$

8								1

де $A=\sqrt{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}+x_4^{\,2}+x_5^{\,2}+x_6^{\,2}+x_7^{\,2}+x_8^{\,2}}$.

Результуюче нормальне перетворення має вигляд

$$\overline{\overline{W_{\Sigma N}}}=\overline{\overline{W_{3N}}}\cdot\overline{\overline{W_{2N}}}\cdot\overline{\overline{W_{1N}}}\,, \qquad (1)$$

де

$\overline{\overline{W}}_{\Sigma N}=$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\frac{x_1}{A}$	$\frac{x_2}{A}$	$\frac{x_3}{A}$	$\frac{x_4}{A}$	$\frac{x_5}{A}$	$\frac{x_6}{A}$	$\frac{x_7}{A}$	$\frac{x_8}{A}$
2	$\frac{-x_2}{a}$	$\frac{x_1}{a}$						
3	$\frac{-x_1\cdot b}{a\cdot\alpha}$	$\frac{-x_2\cdot b}{a\cdot\alpha}$	$\frac{x_3\cdot a}{b\cdot\alpha}$	$\frac{x_4\cdot a}{b\cdot\alpha}$				
4			$\frac{-x_4}{b}$	$\frac{x_3}{b}$				
5	$\frac{-x_1\cdot\beta}{\alpha\cdot A}$	$\frac{-x_2\cdot\beta}{\alpha\cdot A}$	$\frac{-x_3\cdot\beta}{\alpha\cdot A}$	$\frac{-x_4\cdot\beta}{\alpha\cdot A}$	$\frac{x_5\cdot\alpha}{\beta\cdot A}$	$\frac{x_6\cdot\alpha}{\beta\cdot A}$	$\frac{x_7\cdot\alpha}{\beta\cdot A}$	$\frac{x_8\cdot\alpha}{\beta\cdot A}$
6					$\frac{-x_6}{c}$	$\frac{x_5}{c}$		
7					$\frac{-x_5\cdot d}{c\cdot\beta}$	$\frac{-x_6\cdot d}{c\cdot\beta}$	$\frac{x_7\cdot c}{d\cdot\beta}$	$\frac{x_8\cdot c}{d\cdot\beta}$
8							$\frac{-x_8}{d}$	$\frac{x_7}{d}$

де $a=\sqrt{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}}$, $b=\sqrt{x_3^{\,2}+x_4^{\,2}}$, $c=\sqrt{x_5^{\,2}+x_6^{\,2}}$, $d=\sqrt{x_7^{\,2}+x_8^{\,2}}$,

$\alpha=\sqrt{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}+x_4^{\,2}}$, $\beta=\sqrt{x_5^{\,2}+x_6^{\,2}+x_7^{\,2}+x_8^{\,2}}$, $A=\sqrt{\sum_{i=1}^{8}x_i^{\,2}}$,

а спектр отриманого нормального перетворення $\overline{X_{NN}}$ буде являти собою

$$\overline{\overline{W_{\Sigma N}}} \cdot \overline{X_0} = \overline{X_{NN}} = \left[\sqrt{\sum_{i=1}^{8} x_i^{\,2}}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right]^T .$$

При великому форматі N сигналу $\overline{X_0}$, кількість часткових перетворень $\overline{\overline{W_{iN}}}$ при формуванні матричного оператора нормального перетворення в (1) збільшиться, тобто для формату N=2^n кількість часткових операторів буде дорівнювати n.

<u>Практичне заняття №5</u>

Мета: Розробити алгоритм нормалізації сигналу за рівнем. Визначення коефіцієнту трансформант.

Питання, що підлягають розгляду на практичному занятті:

1. Знаходження спектру еталонного сигналу. Визначення коефіцієнта трансформант.
2. Знаходження спектру досліджуваного сигналу. Визначення коефіцієнта трансформант.
3. За визначеними критеріями оцінити приналежність досліджуваного сигналу до еталонного класу.

<u>Вихідні данні (теоретичні відомості)</u>

Нормалізація тестового сигналу за рівнем

Для кращого розуміння основні положення методу будемо розглядати на прикладі конкретного обраного ортогонального перетворення. Для цього оберемо перетворення Уолша-Корчмаржа. .Для таких функцій нормалізацію “за кроком” виконати неможливо (оскільки трансформанти мають лише два значення: +1, -1).

Нехай тестовий сигнал має вигляд рис.2, а формати (кількість відліків) тестового сигналу і функції Уолша – наприклад, ψ_1 (рис.1), однакові.

Поділимо відліки x_{test} на рис.2 на корегуючі коефіцієнти

$$k_n = \frac{x_{test}(n)}{\psi(n)},\ k_n = x_{test}(n)/\psi(n) \qquad (1)$$

Тоді сигнал рис.2 перетвориться на функцію ψ_1 на рис.1. Корегуючі коефіцієнти наведено в табл.1.

Таблиця 1

k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7
B	$B+(A-B)/7$	$B+2(A-B)/7$	$B+3(A-B)/7$	$B+4(A-B)/7$	$B+5(A-B)/7\ B$	$B+6(A-B)/7$	A

k_8	k_9	k_{10}	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}	k_{15}
$-A$	$-B-6(A-B)/7$	$-B-5(A-B)/7$	$-B-4(A-B)/7$	$-B-3(A-B)/7$	$-B-2(A-B)/7$	$-B-(A-B)/7$	$-B$

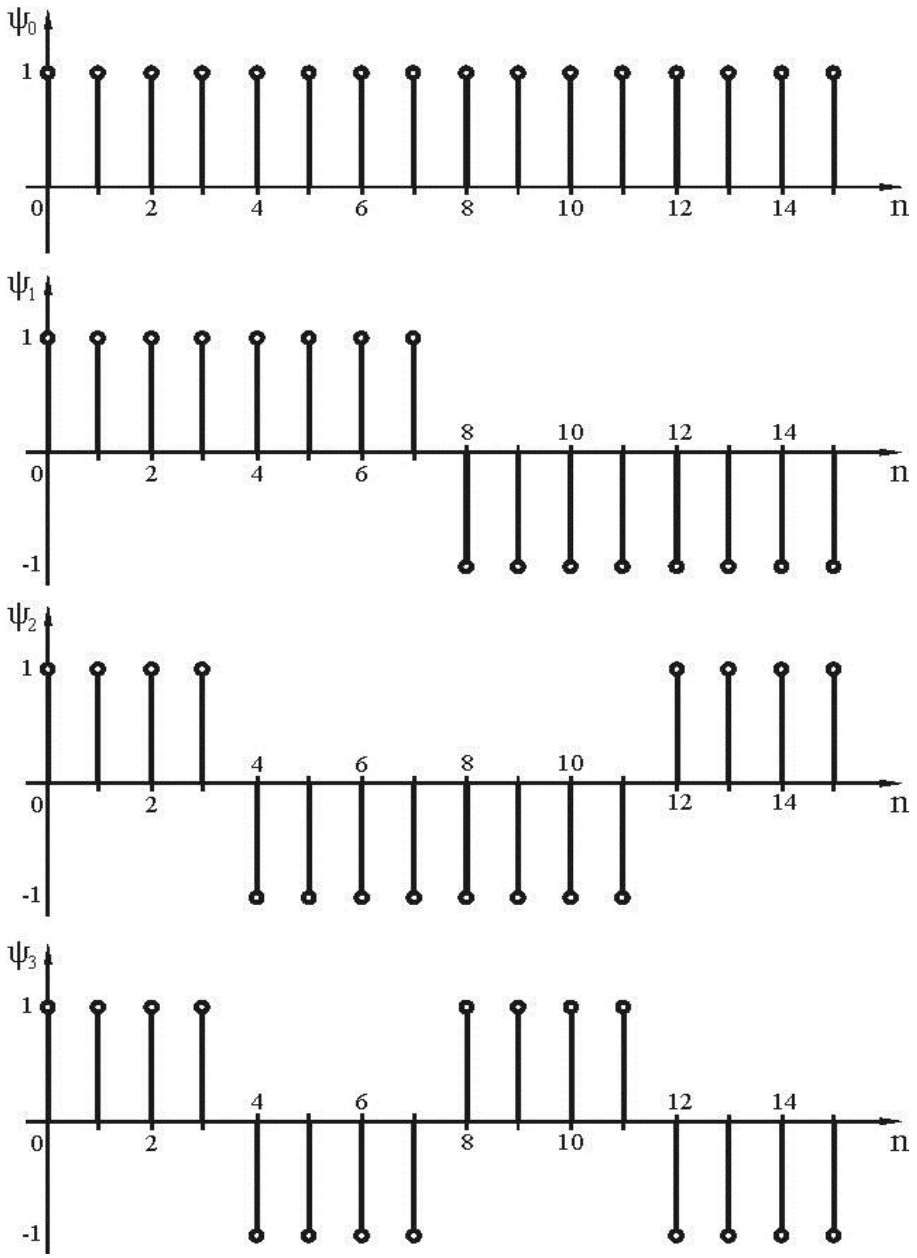


Рис.1 Трансформанти (базисні функції) перетворення Уолша-Корчмаржа

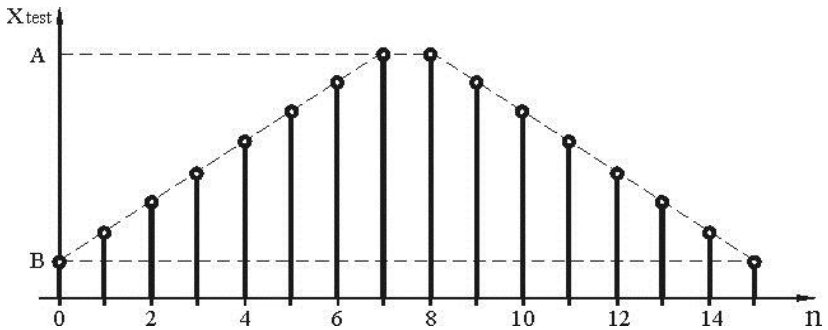


Рис.2 Тестовий сигнал

Алгоритм нормалізації за рівнем має наступний вигляд.

1. Для тестового сигналу (відповідним чином нормованого) обрати ортогональне перетворення та базову трансформанту перетворення.

2. Для кожного з N відліків тестового сигналу і трансформанти знайти корегуючі коефіцієнти.
3. Поділити відліки невідомого досліджуваного сигналу на корегуючі коефіцієнти (якщо сигнал відрізняється від тестового лише амплітудою, одержимо трансформанту дискретного ортогонального перетворення тієї самої амплітуди).
4. Виконати глобальне перетворення скорегованого досліджуваного сигналу.
5. Якщо спектр перетворення містить лише амплітуду трансформанти, за якою проведено нормалізацію, то досліджуваний сигнал (з точністю до амплітуди) тотожний до тестового. Якщо спектр багатий і має велику кількість трансформант, співмірних з базовою для нормалізації, то досліджується сигнал, навіть не схожий на тестовий.

Так, наприклад, перетворення Уолша-Корчмаржа для сигналу x_{test}, зображеного на рис.3 (B=1, A=8), після його нормалізації за трансформантою ψ_1 (рис.1) має вигляд рис. 3. В той самий час для сигналу, зображеного на рис.4, одержимо спектр рис.5. Для сигналу, зображеного на рис.6, з адитивним шумом (σ = 0,244923В, значення відліків шуму $N(n)$ наведено в табл.2) отримаємо спектр нормалізованого перетворення, зображений на рис7.

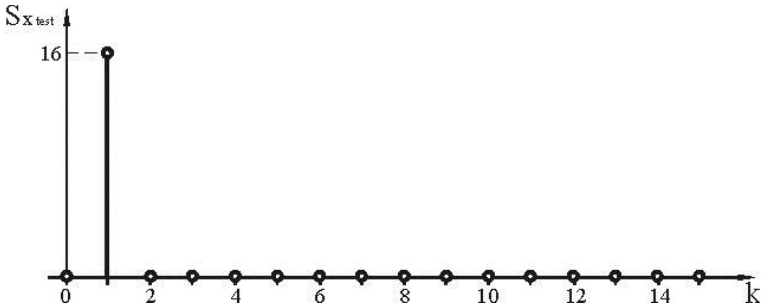


Рис.3 Спектр сигналу x_{test}

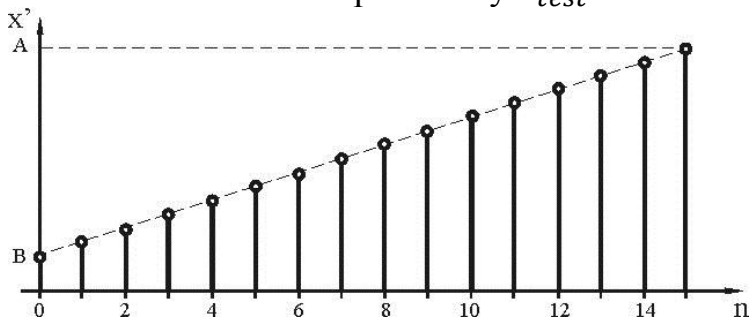


Рис.4

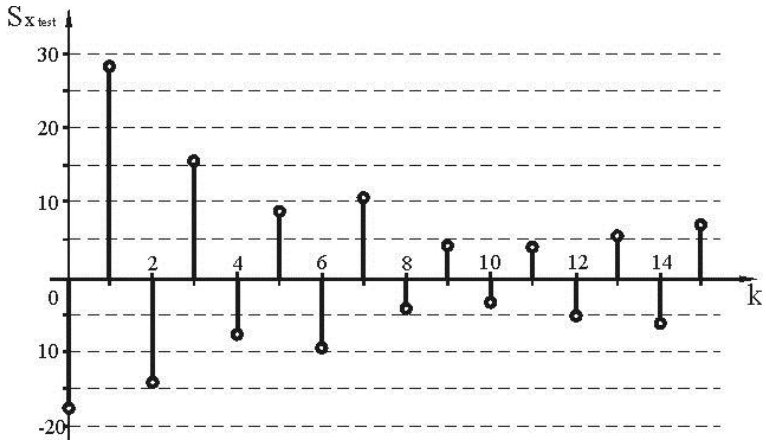


Рис.5

Табл.2

N_0	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7
0	0.25	0.28	−0.19	−0.21	0.20	−0.19	−0.11

N_8	N_9	N_{10}	N_{11}	N_{12}	N_{13}	N_{14}	N_{15}
0.03	−0.50	0.48	0.37	−0.19	−0.38	0.22	0.05

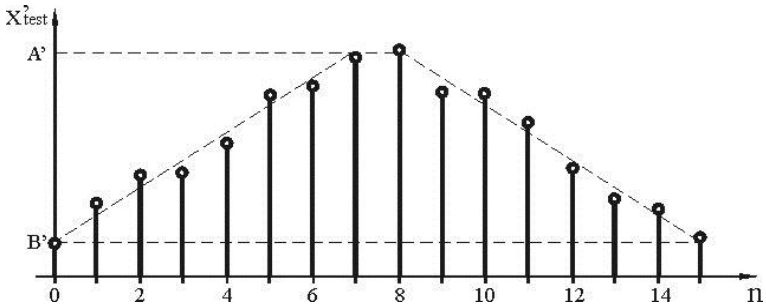


Рис.6

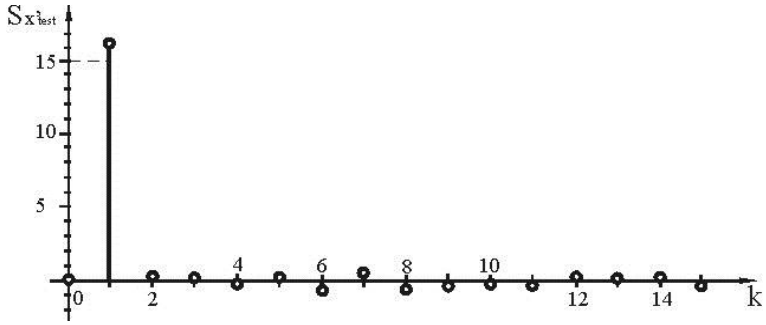


Рис.7

На практиці може виникнути ситуація, коли сигнал, який досліджується, відрізняється від тестового на масштабний множник або містить “додаткову” постійну складову. Такий сигнал, змінений за допомогою масштабного множника і складової, насправді є тим сигналом, який нам потрібно знайти при обробці. Якщо в якості тестового сигналу виступають елементи зображення, то зміна масштабного множника відповідає зміні контрасту зображення, а додаткова постійна складова впливає на яскравість, тобто розбавленість зображення білим. Для того, щоб такий сигнал в результаті виконання нормалізованого перетворення Уолша-

Корчмаржа був визнаний за тестовий, потрібно його центрувати (тобто знайти постійну складову досліджуваного сигналу і відняти її від досліджуваного сигналу), аналогічно, центрованим повинен бути і еталонний сигнал. При цьому обчислювати спектр і гостроту слід саме для такої пари сигналів. При наявності стаціонарного адитивного шуму з шумовим середнім, його додавання до досліджуваного сигналу не вплине на масштабування коефіцієнтів нормалізації.

Оцінку відмін сигналів (викликаних спотвореннями каналів передачі, адитивним шумом тощо) також можна провести за коефіцієнтом трансформант:

$$k_{\text{тр}} = \sqrt{\sum_{i \neq n}^{N-1} A_i^2} / A_n, \qquad (2)$$

де A_n – амплітуда трансформанти, за якою проводилася нормалізація.
Так, для сигналу рис.2 $k_{\text{тр}}$=0, для сигналу рис.2.7 $k_{\text{тр}}$=1.232945, а для сигналу рис. 4 $k_{\text{тр}} \gg 1$.

Наведений приклад нормалізації, що ілюструє запропонований метод, побудовано на трансформанті перетворення Уолша-Корчмаржа, але ясно, що як базову можна прийняти трансформанту будь-якого ортогонального перетворення.

<u>Практичне заняття №6-7</u>

Мета: Розробити алгоритм нормалізації сигналу за кроком. Визначення коефіцієнту трансформант.

Питання, що підлягають розгляду на практичному занятті:

1. Знаходження спектру еталонного сигналу. Визначення коефіцієнта трансформант.
2. Знаходження спектру досліджуваного сигналу. Визначення коефіцієнта трансформант.
3. За визначеними критеріями оцінити приналежність досліджуваного сигналу до еталонного класу.

<u>Вихідні данні (теоретичні відомості)</u>

Нормалізація дискретного ортогонального перетворення за кроком

Для нормалізації [1— 8] перетворення повинен бути наданий еталонний сигнал, порівняння з яким досліджуваного сигналу і має дати відповідь на питання про ступінь відмінності або співпадіння цих двох сигналів. Такий еталонний сигнал слід нормувати таким чином, щоб його максимальне та мінімальне значення дорівнювали +1 та −1 відповідно, що приведе його динамічний діапазон до динамічного діапазону трансформанти обраного для нормалізації ортогонального перетворення.

Для подальшого пояснення процедури нормалізації за кроком розглянемо простий трикутний сигнал (рис. 1,*а*), нормований таким чином, що його динамічний діапазон займає інтервал ±1. Довжина сигналу тотожна періоду обраної ортогональної функції з використовуваного перетворення (рис.1,*б*).

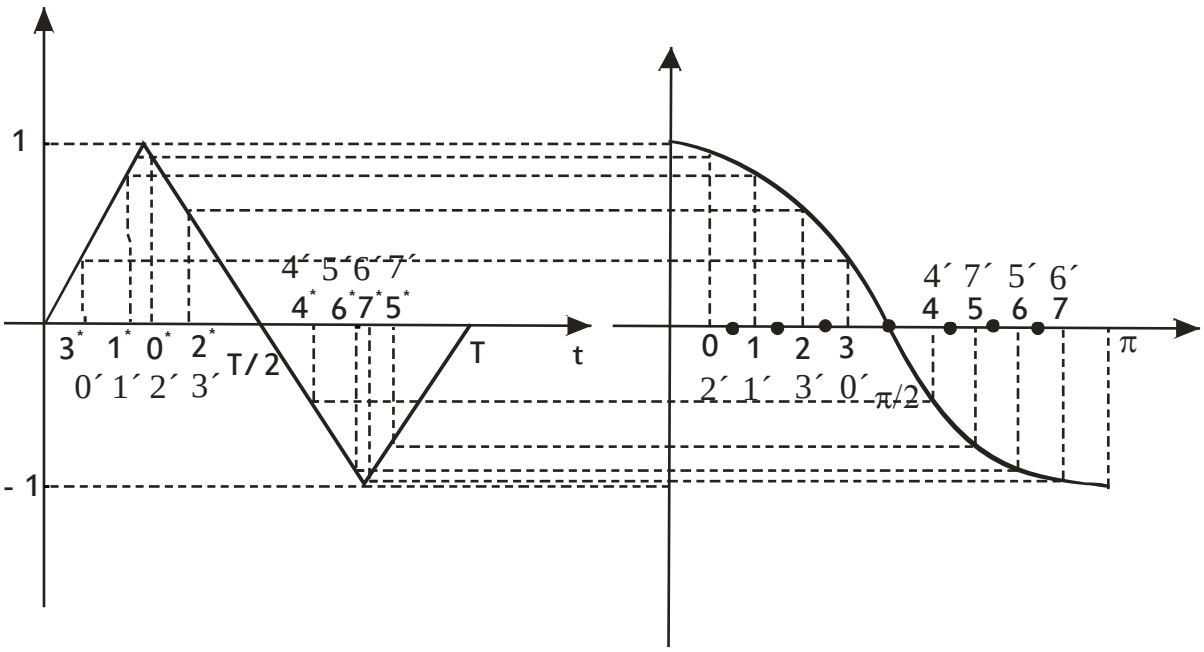
Для простоти демонстрації ідеї нормалізації розглянемо дискретне косинусне перетворення формату $N = 8$. Матричний оператор $\overline{\overline{Cs}}$ такого косинусного перетворення наведено в таблиці 1. Точки 0 – 7 (рис.1,*б*) відповідають стовпцям табл.1, значення дискретних відліків (рис1.*б*) спроеціюємо (горизонтальні штрихові лінії) на нормований трикутник (рис.1,*а*). Отримані на рис.1,*а* точки відліків на трикутниках позначимо зірочками.

Оскільки тестовим є трикутний сигнал, то нумерацію відліків слід привести до номерів, позначених штрихами. Ці номери відповідають новим номерам на косинусній трансформанті (теж позначені штрихами на рис. 1.*б*).

З рис.1,*а* видно, що інтервали дискретизації трикутного сигналу стали нееквідистантними. Ці інтервали повинні також бути розраховані і надані (для даного еталонного сигналу) у вигляді таблиці.

Нормалізація дискретного косинусного перетворення тепер полягає у переставленні стовпців дискретного оператора $\overline{\overline{Cs}}$ (таблиця 1) у відповідності до нової нумерації (штрихами). Дискретний нормалізований матричний оператор $\overline{\overline{Cs}}_N$, отриманий з оператора $\overline{\overline{Cs}}$ (таблиця 1), наведено у таблиці 2.

Якщо взяти елементи рядка 1 у таблиці 2 і (з урахуванням нееквідистантних кроків дискретизації) розташувати їх вздовж осі часу, отримаємо дискретизований трикутний сигнал рис.1,*а*.



а *б*

Рис.1 Нормований сигнал трикутної форми (*а*) і перша трансформанта косинусного перетворення (*б*).

Таблиця 1.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	$\cos\frac{\pi}{16}$	$\cos\frac{3\pi}{16}$	$\cos\frac{5\pi}{16}$	$\cos\frac{7\pi}{16}$	$\cos\frac{9\pi}{16}$	$\cos\frac{11\pi}{16}$	$\cos\frac{13\pi}{16}$	$\cos\frac{15\pi}{16}$
2	$\cos\frac{2\pi}{16}$	$\cos\frac{6\pi}{16}$	$\cos\frac{10\pi}{16}$	$\cos\frac{14\pi}{16}$	$\cos\frac{18\pi}{16}$	$\cos\frac{22\pi}{16}$	$\cos\frac{26\pi}{16}$	$\cos\frac{30\pi}{16}$

3	$\cos\frac{3\pi}{16}$	$\cos\frac{9\pi}{16}$	$\cos\frac{15\pi}{16}$	$\cos\frac{21\pi}{16}$	$\cos\frac{27\pi}{16}$	$\cos\frac{33\pi}{16}$	$\cos\frac{39\pi}{16}$	$\cos\frac{45\pi}{16}$
4	$\cos\frac{4\pi}{16}$	$\cos\frac{12\pi}{16}$	$\cos\frac{20\pi}{16}$	$\cos\frac{28\pi}{16}$	$\cos\frac{36\pi}{16}$	$\cos\frac{44\pi}{16}$	$\cos\frac{52\pi}{16}$	$\cos\frac{60\pi}{16}$
5	$\cos\frac{5\pi}{16}$	$\cos\frac{15\pi}{16}$	$\cos\frac{25\pi}{16}$	$\cos\frac{35\pi}{16}$	$\cos\frac{45\pi}{16}$	$\cos\frac{55\pi}{16}$	$\cos\frac{65\pi}{16}$	$\cos\frac{75\pi}{16}$
6	$\cos\frac{6\pi}{16}$	$\cos\frac{18\pi}{16}$	$\cos\frac{30\pi}{16}$	$\cos\frac{42\pi}{16}$	$\cos\frac{54\pi}{16}$	$\cos\frac{66\pi}{16}$	$\cos\frac{78\pi}{16}$	$\cos\frac{80\pi}{16}$
7	$\cos\frac{7\pi}{16}$	$\cos\frac{21\pi}{16}$	$\cos\frac{35\pi}{16}$	$\cos\frac{49\pi}{16}$	$\cos\frac{63\pi}{16}$	$\cos\frac{77\pi}{16}$	$\cos\frac{91\pi}{16}$	$\cos\frac{105\pi}{16}$

Таблиця 2.

	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′
0′	1	1	1	1	1	1	1	1
1′	$\cos\frac{5\pi}{16}$	$\cos\frac{3\pi}{16}$	$\cos\frac{7\pi}{16}$	$\cos\frac{\pi}{16}$	$\cos\frac{9\pi}{16}$	$\cos\frac{15\pi}{16}$	$\cos\frac{11\pi}{16}$	$\cos\frac{13\pi}{16}$
2′	$\cos\frac{10\pi}{16}$	$\cos\frac{6\pi}{16}$	$\cos\frac{14\pi}{16}$	$\cos\frac{2\pi}{16}$	$\cos\frac{18\pi}{16}$	$\cos\frac{30\pi}{16}$	$\cos\frac{22\pi}{16}$	$\cos\frac{26\pi}{16}$
3′	$\cos\frac{15\pi}{16}$	$\cos\frac{9\pi}{16}$	$\cos\frac{21\pi}{16}$	$\cos\frac{3\pi}{16}$	$\cos\frac{27\pi}{16}$	$\cos\frac{45\pi}{16}$	$\cos\frac{33\pi}{16}$	$\cos\frac{39\pi}{16}$
4′	$\cos\frac{20\pi}{16}$	$\cos\frac{12\pi}{16}$	$\cos\frac{28\pi}{16}$	$\cos\frac{4\pi}{16}$	$\cos\frac{36\pi}{16}$	$\cos\frac{60\pi}{16}$	$\cos\frac{44\pi}{16}$	$\cos\frac{52\pi}{16}$
5′	$\cos\frac{25\pi}{16}$	$\cos\frac{15\pi}{16}$	$\cos\frac{35\pi}{16}$	$\cos\frac{5\pi}{16}$	$\cos\frac{45\pi}{16}$	$\cos\frac{75\pi}{16}$	$\cos\frac{55\pi}{16}$	$\cos\frac{65\pi}{16}$
6′	$\cos\frac{30\pi}{16}$	$\cos\frac{18\pi}{16}$	$\cos\frac{42\pi}{16}$	$\cos\frac{6\pi}{16}$	$\cos\frac{54\pi}{16}$	$\cos\frac{90\pi}{16}$	$\cos\frac{66\pi}{16}$	$\cos\frac{78\pi}{16}$
7′	$\cos\frac{35\pi}{16}$	$\cos\frac{21\pi}{16}$	$\cos\frac{49\pi}{16}$	$\cos\frac{7\pi}{16}$	$\cos\frac{63\pi}{16}$	$\cos\frac{105\pi}{16}$	$\cos\frac{77\pi}{16}$	$\cos\frac{91\pi}{16}$

Тепер, якщо досліджуваний сигнал відрізняється від еталонного тільки масштабним множником і постійною складовою, то добутки відліків взятих з цього досліджуваного сигналу (з відомим нееквідистантним кроком) дадуть нульову (за номером) і першу трансформанту. Усі інші трансформанти нормалізованого перетворення дорівнюватимуть нулю.

Якщо форма сигналу (внаслідок певних неістотних спотворень) буде трошки відрізнятися від форми еталонного, то ненульовими будуть і інші (крім

першої і нульової) трансформанти. Якщо відміни будуть суттєві, то вищі трансформанти будуть мати великі амплітуди.

Ступінь відміни форми досліджуваного сигналу від еталонного можна кількісно оцінити за допомогою коефіцієнта трансформант

$$k_{\text{тр}} = \sqrt{\sum_{k=0,k\neq 1}^{N-1} I_k^2 \times \varepsilon_k^2} \,/\, (I_1 \times \varepsilon_1), \qquad (2)$$

де I_k – амплітуда k-ї трансформанти; ε_k – енергія k-ї трансформанти одиничної амплітуди.

Формула (2) є зручною для оцінки спотворень при використанні для аналізу тих самих сигналів різних ортогональних перетворень.

Енергію трансформанти одиничної амплітуди можна розрахувати за формулою

$$\varepsilon_k^2 = \sum_{n=0}^{N-1} s_k^2(n) \times \Delta t, \qquad (3)$$

де $s_k(n)$ — відлік n-ї трансформанти.

Якщо різні сигнали порівнюються за єдиним нормалізованим перетворенням, можна використовувати спрощену форму коефіцієнта трансформації

$$k_{\text{тр}} = \sqrt{\sum_{k=2}^{N-1} I_k^2} \,/ I_1. \qquad (4)$$

Часто при пошуку сигналів, які певною мірою співпадають із еталонним зручно використовувати зворотну до коефіцієнта трансформант гостроту.

$$\Gamma = 1/k_{\text{тр}}. \qquad (5)$$

В цьому випадку перевищення гостротою певного наперед наданого порогу дозволяє зробити висновок про наявність сигналу, близького до тестового (еталонного) і навпаки.

На завершення нагадаємо, що єдиною незручністю методу нормалізації за кроком є нееквідистантний крок дискретизації, що може бути незручно при дискретизації сигналу стандартними пристроями.

Практичне заняття №8-9

Мета: Розробити алгоритм класифікації сигналу за допомогою нормального перетворення. Визначення коефіцієнту трансформант.

Питання, що підлягають розгляду на практичному занятті:

1. Створення матричного оператора нормального перетворення на базі еталонного сигналу.
2. Знаходження спектру еталонного сигналу. Визначення коефіцієнта трансформант.
3. Знаходження спектру досліджуваного сигналу. Визначення коефіцієнта трансформант.
4. За визначеними критеріями оцінити приналежність досліджуваного сигналу до еталонного класу.

Вихідні данні (теоретичні відомості)

Для визначеності й наочності ілюстрації процедури побудови нормального перетворення виберемо формат перетворення N рівним восьми (що дозволить надалі узагальнити отриманий результат на довільний формат $N=2^n$, де n – ціле додатне число). Формат перетворення і формат сигналу збігаються. Тому нехай сигнал $x(t)$ на періоді, рівному тривалості сигналу, задано вектором відліків $\overline{X_0}=[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$, де T – знак транспонування. Для формату N=8 $\overline{X_0}=[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8]^T$.

Для одержання нормального перетворення сигналу $\overline{X_0}$ проведемо ряд перетворень, при кожному з яких кількість ненульових трансформант у порівнянні з вихідним сигналом буде зменшуватися вдвічі.

Першим з таких перетворень $\overline{\overline{W_1}}$ буде блочно-діагональна матриця, головна діагональ якої складається із блоків $\overline{\overline{W_1}}^{(i)}=\begin{bmatrix} x_{i+1} & x_{i+2} \\ -x_{i+2} & x_{i+1} \end{bmatrix}$.

Для формату N=8 ця матриця матиме вигляд

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	x_1	x_2						
2	$-x_2$	x_1						
3			x_3	x_4				

$\overline{\overline{W_1}} =$

4			$-x_4$	x_3				
5					x_5	x_6		
6					$-x_6$	x_5		
7							x_7	x_8
8							$-x_8$	x_7

Для забезпечення ортогональності рядків матриці $\overline{\overline{W_1}}$ достатньо забезпечити ортогональність лише кожної пари рядків: 1-го та 2-го, 3-го та 4-го, 5-го та 6-го і т.д., оскільки рядки 1 і 2 завжди ортогональні по відношенню до рядків 3, 4, 5, 6 тощо внаслідок того, що вони належать до різних блоків діагоналі матриці $\overline{\overline{W_1}}$.

Так, при перевірці на ортогональність першого рядка з другим та третього з четвертим, отримаємо скалярні добутки:

$$x_1(-x_2)+x_2x_1=0 \text{ і } x_3(-x_4)+x_4x_3=0.$$

У результаті перемноження матриці $\overline{\overline{W_1}}$ і вектора $\overline{X_0}$ одержимо стовпець першого (із серії) перетворення $\overline{X_1}=\overline{\overline{W_1}}\cdot\overline{X_0}$, де для N=8

$$\overline{X_1}=[(x_1{}^2+x_2{}^2),\ 0,\ (x_3{}^2+x_4{}^2),\ 0,\ (x_5{}^2+x_6{}^2),\ 0,\ (x_7{}^2+x_8{}^2),\ 0]^T.$$

Для забезпечення ортогональності кратного перетворення матрицю $\overline{\overline{W_1}}$ слід нормувати, для чого знайдемо добуток $\overline{\overline{W_1}}\cdot\overline{\overline{W_1}}^T=diag\{\overline{\overline{\varepsilon_1}}\}$, де $diag\{\overline{\overline{\varepsilon_1}}\}$ - діагональна матриця з елементами головної діагоналі $(x_1{}^2+x_2{}^2)$, $(x_1{}^2+x_2{}^2)$, $(x_3{}^2+x_4{}^2)$, $(x_3{}^2+x_4{}^2)$, $(x_5{}^2+x_6{}^2)$, $(x_5{}^2+x_6{}^2)$, $(x_7{}^2+x_8{}^2)$, $(x_7{}^2+x_8{}^2)$.

Поділивши рядки матриці $\overline{\overline{W_1}}$ на відповідні значення $(x_{i+1}{}^2+x_{i+2}{}^2)^{1/2}$ діагоналі, одержимо матрицю $\overline{\overline{W_{1N}}}$, таку, що $\overline{\overline{W_{1N}}}\cdot\overline{\overline{W_{1N}}}^T=\overline{\overline{W_{1N}}}^T\cdot\overline{\overline{W_{1N}}}=\overline{\overline{E}}$, де $\overline{\overline{E}}$ - одинична матриця. Для N=8 матриця $\overline{\overline{W_{1N}}}$ представляє собою:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	x_1/a	x_2/a						
2	$-x_2/a$	x_1/a						
3			x_3/b	x_4/b				
4			$-x_4/b$	x_3/b				

$\overline{\overline{W_{1N}}} =$

5					x_5/c	x_6/c		
6					$-x_6/c$	x_5/c		
7							x_7/d	x_8/d
8							$-x_8/d$	x_7/d

де $a=\sqrt{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}}$, $b=\sqrt{x_3^{\ 2}+x_4^{\ 2}}$, $c=\sqrt{x_5^{\ 2}+x_6^{\ 2}}$, $d=\sqrt{x_7^{\ 2}+x_8^{\ 2}}$.

Тоді частково нормалізований (із чотирма нульовими значеннями) спектр $\overline{X_{1N}}=\overline{\overline{W_{1N}}}\cdot\overline{X_0}$ має вигляд

$$\overline{X_{1N}}=[\sqrt{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}},0,\sqrt{x_3^{\ 2}+x_4^{\ 2}},0,\sqrt{x_5^{\ 2}+x_6^{\ 2}},0,\sqrt{x_7^{\ 2}+x_8^{\ 2}},0]^T.$$

Для перетворення ненульових значень сигналу $\overline{X_{1N}}$ побудуємо матрицю $\overline{\overline{W_2}}$, аналогічно тому, як це було зроблено для матриці $\overline{\overline{W_1}}$. Тобто друге перетворення $\overline{\overline{W_2}}$ являє собою матрицю, де елементи, номера рядків і стовпців яких відповідають ненульовим елементам вектора $\overline{X_{1N}}$, мають значення $w_{11}=w_{33}=\sqrt{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}}$, $w_{13}=-w_{31}=\sqrt{x_3^{\ 2}+x_4^{\ 2}}$, $w_{55}=w_{77}=\sqrt{x_5^{\ 2}+x_6^{\ 2}}$, $w_{57}=-w_{75}=\sqrt{x_7^{\ 2}+x_8^{\ 2}}$. Діагональні ж елементи, що відповідають нулям вектора $\overline{X_{1N}}$, у загальному випадку можна замінити будь-якими числами, оскільки це не вплине на результат другого перетворення. Але залишити їх нульовими не можна, оскільки результуючу матрицю $\overline{\overline{W_{\Sigma N}}}$ нормального перетворення будемо одержувати перемноженням матриць всіх часткових перетворень $\overline{\overline{W_{iN}}}$. А $\overline{\overline{W_{\Sigma N}}}$ не повинна містити нульових рядків або(та) стовпців, оскільки при цьому матриця зворотного перетворення $\overline{\overline{W_{\Sigma N}}}^{-1}$ не існуватиме.

У даному випадку покладемо діагональні елементи матриці $\overline{\overline{W_2}}$, що відповідають нулям вектора $\overline{X_{1N}}$, рівними одиницям. Матричний оператор нормального перетворення, що спиратиметься на таку матрицю $\overline{\overline{W_2}}$ часткового перетворення назвемо матричним оператором першого виду.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\sqrt{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}}$		$\sqrt{x_3^{\ 2}+x_4^{\ 2}}$					

$$\overline{\overline{W_2}} = \begin{array}{c|cccccccc}
2 & & 1 & & & & & & \\
3 & -\sqrt{x_3^2+x_4^2} & & \sqrt{x_1^2+x_2^2} & & & & & \\
4 & & & & 1 & & & & \\
5 & & & & & \sqrt{x_5^2+x_6^2} & & \sqrt{x_7^2+x_8^2} & \\
6 & & & & & & 1 & & \\
7 & & & & & -\sqrt{x_7^2+x_8^2} & & \sqrt{x_5^2+x_6^2} & \\
8 & & & & & & & & 1
\end{array}$$

Тепер спектр $\overline{X_2}$ другого часткового перетворення $\overline{\overline{W_2}} \cdot \overline{X_1} = \overline{X_2}$

$$\overline{X_2} = [(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2), 0, 0, 0, (x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2), 0, 0, 0]^T.$$

Пронормуємо $\overline{\overline{W_2}}$:

$$\overline{\overline{W_2}} \cdot \overline{\overline{W_2}}^T = Diag\{(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2), 1, (x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2), 1, (x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2), 1, (x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2), 1,\}.$$

Тобто при нормуванні перший та третій рядки матриці $\overline{\overline{W_2}}$ слід розділити на $\alpha = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}$, а п’ятий та сьомий відповідно на $\beta = \sqrt{x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2}$. Таким чином отримаємо нормовану матрицю $\overline{\overline{W_{2N}}}$

$$\overline{\overline{W_{2N}}} = \begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
1 & \frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{\alpha} & & \frac{\sqrt{x_3^2+x_4^2}}{\alpha} & & & & & \\
2 & & 1 & & & & & & \\
3 & -\frac{\sqrt{x_3^2+x_4^2}}{\alpha} & & \frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{\alpha} & & & & & \\
4 & & & & 1 & & & & \\
5 & & & & & \frac{\sqrt{x_5^2+x_6^2}}{\beta} & & \frac{\sqrt{x_7^2+x_8^2}}{\beta} & \\
6 & & & & & & 1 & &
\end{array}$$

7					$-\dfrac{\sqrt{x_7^2+x_8^2}}{\beta}$		$\dfrac{\sqrt{x_5^2+x_6^2}}{\beta}$	
8								1

Після відповідного нормування матриці другого перетворення одержимо вектор $\overline{X_{2N}}$, що містить ненульові елементи в першому рядку $x_{N2}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}$ і в п'ятому рядку $x_{N5}=\sqrt{x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2}$

$$\overline{X_{2N}}=[\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2},0,0,0,\sqrt{x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2},0,0,0]^T.$$

Для двох ненульових елементів, що залишилися, побудуємо матрицю $\overline{\overline{W_3}}$

$\overline{\overline{W_3}}=$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}$				$\sqrt{x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2}$			
2		1						
3			1					
4				1				
5	$-\sqrt{x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2}$				$\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}$			
6						1		
7							1	
8								1

$$\overline{\overline{W_3}}\cdot\overline{\overline{W_3}}^T=Diag\{(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2),1,1,1,$$
$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2),1,1,1,\}.$$

Аналогічно до попередніх кроків, після нормування одержимо $\overline{\overline{W_{3N}}}$

$\overline{\overline{W}}_{3N}=$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\dfrac{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}}{A}$				$\dfrac{\sqrt{x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2}}{A}$			
2		1						
3			1					
4				1				

5	$-\dfrac{\sqrt{x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2}}{A}$				$\dfrac{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}}{A}$			
6						1		
7							1	
8								1

де $A=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2}$.

Результуюче нормальне перетворення має вигляд

$$\overline{\overline{W_{\Sigma N}}}=\overline{\overline{W_{3N}}}\cdot\overline{\overline{W_{2N}}}\cdot\overline{\overline{W_{1N}}}\,, \qquad (1)$$

де

$\overline{\overline{W}}_{\Sigma N}=$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\dfrac{x_1}{A}$	$\dfrac{x_2}{A}$	$\dfrac{x_3}{A}$	$\dfrac{x_4}{A}$	$\dfrac{x_5}{A}$	$\dfrac{x_6}{A}$	$\dfrac{x_7}{A}$	$\dfrac{x_8}{A}$
2	$\dfrac{-x_2}{a}$	$\dfrac{x_1}{a}$						
3	$\dfrac{-x_1\cdot b}{a\cdot\alpha}$	$\dfrac{-x_2\cdot b}{a\cdot\alpha}$	$\dfrac{x_3\cdot a}{b\cdot\alpha}$	$\dfrac{x_4\cdot a}{b\cdot\alpha}$				
4			$\dfrac{-x_4}{b}$	$\dfrac{x_3}{b}$				
5	$\dfrac{-x_1\cdot\beta}{\alpha\cdot A}$	$\dfrac{-x_2\cdot\beta}{\alpha\cdot A}$	$\dfrac{-x_3\cdot\beta}{\alpha\cdot A}$	$\dfrac{-x_4\cdot\beta}{\alpha\cdot A}$	$\dfrac{x_5\cdot\alpha}{\beta\cdot A}$	$\dfrac{x_6\cdot\alpha}{\beta\cdot A}$	$\dfrac{x_7\cdot\alpha}{\beta\cdot A}$	$\dfrac{x_8\cdot\alpha}{\beta\cdot A}$
6					$\dfrac{-x_6}{c}$	$\dfrac{x_5}{c}$		
7					$\dfrac{-x_5\cdot d}{c\cdot\beta}$	$\dfrac{-x_6\cdot d}{c\cdot\beta}$	$\dfrac{x_7\cdot c}{d\cdot\beta}$	$\dfrac{x_8\cdot c}{d\cdot\beta}$
8							$\dfrac{-x_8}{d}$	$\dfrac{x_7}{d}$

де $a=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $b=\sqrt{x_3^2+x_4^2}$, $c=\sqrt{x_5^2+x_6^2}$, $d=\sqrt{x_7^2+x_8^2}$,

$\alpha=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}$, $\beta=\sqrt{x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2}$, $A=\sqrt{\sum_{i=1}^{8}x_i^2}$,

а спектр отриманого нормального перетворення $\overline{X_{NN}}$ буде являти собою

$$\overline{\overline{W_{\Sigma N}}} \cdot \overline{X_0} = \overline{X_{NN}} = \left[\sqrt{\sum_{i=1}^{8} x_i^{\,2}}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right]^T .$$

При великому форматі N сигналу $\overline{X_0}$, кількість часткових перетворень $\overline{\overline{W_{iN}}}$ при формуванні матричного оператора нормального перетворення в (1) збільшиться, тобто для формату N=2^n кількість часткових операторів буде дорівнювати n.

Список рекомендованої літератури

1. Рыбин А. И. Нормализация дискретных ортогональных преобразований тестовым сигналом / А.И. Рыбин // Радиолектроника. – 2004.— №7. – С. 39 – 46. (Изв. высш. учеб. заведений).

2. Рыбин А. И, Алгоритм подстройки дискретного ортогонального преобразования под тестовый сигнал / А.И. Рыбин, Е.Г. Григоренко // Вісник НТУУ "КПІ". Сер. Приладобудування. – 2004.— №27. – С. 122 – 128.

3. Рибін О. І. Діагностичні можливості процедури нормалізації ортогональних функій при аналізі пульсограм / О.І. Рибін, О.Б. Шарпан // Вісник ЖДТУ. Технічні науки – 2004. – т. 1.— №4. – С. 144 – 149.

4. Рибін О. І. Алгоритми формування матричних операторів дискретних ортогональних перетворень REX та Corex / О.І. Рибін, О.Б. Шарпан // Вісник ЖДТУ. – 2004. – т. 2.— №4(31). – С. 53 – 57.

5. Рибін О. І. Аналіз пульсограм на базі процедури нормалізації ортогональних перетворень REX /О.І. Рибін, О.Б. Шарпан, Т.В. Сакалош // Наукові вісті НТУУ "КПІ" – 2005.— №4. – С. 29 – 33.

6. Рыбин А. И. Коэффициенты трансформант нормализованных ортогональных преобразований и диагностика пульсограм / А.И. Рыбин, О.Б. Шарпан, Е.Г. Григоренко, Т.В. Сакалош // Вісник НТУУ "КПІ". Сер. Приладобудування.— 2005. – Вип. 30. – С. 148 – 156.

7. Данилевська В. Г. Особливості і можливості діагностики з нормалізованим перетворенням Фур'є пульсового сигналу / В.Г. Данилевська, О.В. Луцук, О.І. Рибін, О.Б. Шарпан // Электроника и связь – 2006.— №2. – С. 49 – 54.

8. Рибін О. І. Погоджена фільтрація на базі нормалізації ортогональних перетворень О.І. Рибін, В.Г. Данилевська // Вісник НТУУ "КПІ". Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування. – 2007. – Вип. 35. – С. 15 – 20.

9. Рибін О.І. Погоджена фільтрація сигналів при зміні масштабу їх аргументів на базі нормалізованих вейвлет- функцій / О.І. Рибін, А.Д. Мельник // Вісник НУТУ»КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування.— 2007.— №34.— С.18— 24.

10. Мельник А.Д. Нормалізація тестового сигналу зі збереженням еквідистантного кроку дискретизації / А.Д. Мельник, О.І. Рибін // Вісник НТУУ»КПІ» . Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування .— 2008.— 34.— С. 24— 29.

11. Мельник А.Д. Нормализация эталонного сигнала с постоянным шагом дискретизации / А.Д. Мельник, А.И. Рыбин // Радиоэлектроника — 2008.— №1.— С. 71 — 75 (Изв. вузов).

12. Рыбин А.И. Согласованная нормализованная фильтрация сигналов / А.И. Рыбин, А.Д. Мельник // Радиоэлектроника — 2008.— №2.— С. 77 — 78 (Изв. вузов).
13. Мельник А.Д. Согласованная вейвлет-фильтрация сигналов с измененным масштабом / А.И. Рыбин, А.Д. Мельник // Радиоэлектроника — 2008.— №3.— С. 76 — 80 (Изв. вузов).
14. Рибін О.І. Алгоритм формування матричного оператора дискретного нормального перетворення / О.І. Рибін, Ю.Х. Ніжебецька // Вісник НТУУ»КПІ» . Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування .— 2008.— №36.— С.19— 27.
15. Ніжебецька Ю.Х. Нормальне дискретне перетворення сигналу довільної форми / Ю.Х. Ніжебецька, О.І. Рибін, А.П. Ткачук, О.Б. Шарпан // Наукові вісті НУТУ «КПІ».— 2008.— №4.— С.34— 40.
16. Рибін О.І. Аутентифікація особи за динамічно введеним підписом з використанням нормального перетворення / О.І. Рибін, Ю.Х. Ніжебецька, А.М. Луцків // Вісник НТУУ»КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування .— 2010.— №40.— С.26— 30.
17. Рыбин А.И. Анализ подобия и различия образов с использованием нормального ортогонального преобразования / А.И. Рыбин, Ю.Х. Нижебецкая // Радиоэлектроника — 2010.— №3.— С. 58 — 64 (Изв. вузов).
18. Рибін О.І. Погоджена фільтрація: класичний лінійний та нормальний фільтри / О.І. Рибін, Ю.Х. Ніжебецька // Вісник НТУУ»КПІ» . Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування .— 2010.— №41.— С.5 — 12.
19. Jan Jiří Číslicova filtrace, analŷza a restaurace signlů / VUT v BRNĚ, 1997, 438s.
20. Системи відображення інформації в медицині (Навчальний посібник з грифом МОН України) / / В.Г. Абакумов, О.І. Рибін, Й. Сватош, Ю.С. Синєкоп.— Київ, ТОО «Век +», 1999, 320 с.
21. Системи отображения информации в медицине (навчальний посібник) / В.Г. Абакумов, А.И. Рыбин, Й. Сватош, Ю.С. Синєкоп.— Киев, «Юниверс», 2000, 333 с.
22. Основи теорії кіл. Ч.2. Підручник для студентів ВНЗ / Ю.О. Коваль, Л.В. Гринченко, І.О. Милютченко, О.І. Рибін / За загальною редакцією В.М. Шокала та В.І. Правди.— Харків: ХНУРЕ; Колегіум, 2006, 668с.
23. Основи теорії кіл: Підручник для студентів вищих навчальних закладів.Ч.2. / Ю.О. Коваль, Л.В. Гринченко, І.О. Милютченко, О.І. Рибін / За загальною редакцією В.М. Шокала та В.І. Правди.— Харків, ТОВ «Компанія СМІТ», 2008, 560с.

24. Прэтт У. Цифровая обработка изображений/ У. Прєтт // Пер.с англ. – М., “Мир. – 1982. – Кн.2.– 480 с.
25. Рыбин А.И. Алгоритм условной деконволюции в частотной области / А.И. Рыбин, В.Ю. Королев // Радиоэлектроника — 2000.— №6.— С. 51 — 55 (Изв. вузов).
26. Рибін О.І. Реставраврація образів методом умовної деконволюції в області просторових частот / О.І. Рибін, В.Ю. Корольов // Вісник Технічного университету Поділля.— 2000.— С.145 — 147.
27. Рыбин А.И. Реставрация образов в частотной области методом взвешенной фильтрации / А.И. Рыбин, В.Ю. Королев // Радиоэлектроника — 2001.— №4.— С. 51 — 56 (Изв. вузов).
28. Макаренко А.С. Реставрация образов методом частотной коррекции с компенсацией реализации аддитивного шума / А.С. Макаренко, А.И. Рыбин, В.Ю. Королев // Радиоэлектроника — 2001.— №7.— С. 50 — 57 (Изв. вузов).
29. Рыбин А.И. Восстановление изображения методом частотной коррекции с компенсацией реализации аддитивного шума и последующим аналитическим продолжением спектра / А.И. Рыбин, В.Ю. Королев // Электроника и свіязь.— 2000.— №9.— С.69.— 71.
30. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы / И.С. Гоноровский // 1986.— М.: Радио и связь.— 512с.
31. Зиновьев А.А. Введение в теорию сигналов и цепей / А.А. Зиновьев, Л.И. Филиппов // 1975.— М.: Высшая школа.— 264с.
14. Харкевич А.А. Спектры и анализ / А.А. Харкевич // 1962.— М.: Гос. Издательство физико-математической литературы.— 236с.
32. Физика визуализации изображений в медицине. Под ред. С. Уэбба.—М.: Мир,1991, т.1.—408с., т.2—408с.
33. Радіотехніка: Енциклопедичний навчальний довідник: Навч. посібник / За ред. Ю.Л. Мазора, Є.А. Мачуського, В.І. Правди.— К.: Вища школа, 1999.— 938с.
34. Волощук Ю.І. Сигнали та процеси у радіотехніці. Підручник для ВНЗ/ Ю.І. Волощук // 2003.— т.2.— Х.: Компанія СМІТ.— 496с.
35. Рабинер Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов/ Л. Рабинер, Б. Гоулд //1978.— М.: Мир.—848с.
36. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов: Учеб. пособие для вузов / А.Б. Сергиенко / 2002.— СПб.: Питер.—608с.
37. Біомедичні сигнали та їх обробка (навчальний посібник з грифом МОН України) / В.Г. Абакумов, О.І. Рибін, О.В. Геранін, Й. Сватош, Ю.С. Синєкоп.— Київ, ТОО „ВЕК+”, 1997, 352 с.
38. Ахмед Н. Ортогональные преобразования при обработке цифрових

сигналов/ Н.Ахмед, К.Р. Рао / Пер. с англ. / Под ред. И. Б. Фоменко. – М.: Связь, 1980. – 248 с.
39. Рыбин А.И. Алгоритм условной деконволюции в частотной области / А.И. Рыбин, В.Ю. Королев // Радиоэлектроника — 2000.— №6.— С. 51 — 55 (Изв. вузов)
40. Рибін О.І. Реставраврація образів методом умовної деконволюції в області просторових частот / О.І. Рибін, В.Ю. Корольов // Вісник Технічного университету Поділля.— 2000.— С.145 — 147.
41. Рыбин А.И. Реставрация образов в частотной области методом взвешенной фильтрации / А.И. Рыбин, В.Ю. Королев // Радиоэлектроника — 2001.— №4.— С. 51 — 56 (Изв. вузов).