

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Класифікація сигналів

Методичні вказівки
до розрахунково-графічної роботи
з дисципліни «Цифрове оброблення зображень»
для студентів радіотехнічного факультету

Рекомендовано вченою радою радіотехнічного факультету

Київ
НТУУ «КПІ»
2013

Класифікація сигналів [Текст] : метод. вказівки до розрахунково-графічної роботи з дисципліни «Цифрове оброблення зображень» для студ. радіотехнічного ф-ту / Уклад. О.І. Рибін, І.О. Сушко - К.: НТУУ "КПІ", 2013. – 30 с.

Гриф надано вченою радою радіотехнічного факультету НТУУ "КПІ"
(Протокол № ____ від _____)

Рекомендовано навчально-методичною комісією радіотехнічного факультету
(Протокол № ____ від _____)

На в ч а л ь н е в и д а н н я

Класифікація сигналів

Методичні вказівки

до розрахунково-графічної роботи
з дисципліни «Цифрове оброблення зображень»
для студентів радіотехнічного факультету

Укладачі

*Рибін Олександр Іванович, д.т.н., проф.
Сушко Ірина Олександрівна, асистент*

Відповідальний
редактор

Антипенко Руслан Володимирович, канд. техн. наук, проф.

Рецензент

Шпилька Олександр Олександрович, канд. техн. наук.

За редакцією укладачів

НТУУ «КПІ»
Радіотехнічний факультет
03056, Київ, вул. Політехнічна, 12, корп. 17
Тел./факс (044) 454-92-93

**Розрахунково-графічна робота з дисципліни
«Цифрове оброблення зображень»
«Класифікація сигналів»**

**КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ
НОРМАЛІЗАЦІЯ ПЕРЕТВОРЕНЬ**

Вступні зауваження

Ортогональні перетворення часто використовують для оцінки змін в графоелементах досліджуваних сигналів, коли ці зміни не дуже помітні в натуральних координатах.

Так, наприклад, спотворення форми електричного гармонічного струму, «на око» можуть бути не помітними, в той час, як на спектрі Фур'є відсутність чи наявність складових кратних частот (з амплітудами I_i) є помітною і, до того ж, може бути чисельно оцінена коефіцієнтом гармонік

$$k_{\Gamma} = \sqrt{\sum_{i=2}^{N-1} I_i^2} / I_1. \quad (1)$$

Зручність оцінки спотворень у приведеному прикладі зумовлена тим, що форма ідеального досліджуваного сигналу співпадає із формою однієї (першої) з трансформант ряду Фур'є. На жаль, еталони досліджуваних радіотехнічних, біомедичних та інших сигналів зазвичай не співпадають по формі із трансформантами існуючих ортогональних перетворень, не зважаючи на велику кількість таких перетворень.

Універсальний характер перетворень призводить до того, що певні графоелементи «розмиваються» в області трансформант і стають непомітними. Зміни в області трансформант стають тим помітнішими, чим менше домінантних (тобто таких, що значно більші за інші) трансформант (інакше кажучи, чим вужчий ефективний спектр перетворення) знаходяться в спектрі досліджуваного сигналу. Це сприяло спробам (часто успішним) використання перетворень, відмінних від перетворень Фур'є і, як вже згадувалося, було знайдено, що зручним для аналізу сигналів зв'язку є перетворення Уолша, а біосигналів – косинусне перетворення.

Тому велике значення має створення таких дискретних ортогональних перетворень, які б мали трансформанти, що співпадають (або у певному сенсі співпадають) з еталонами досліджуваних сигналів.

Нормалізація дискретного ортогонального перетворення за кроком

Для нормалізації [1— 8] перетворення повинен бути наданий еталонний сигнал, порівняння з яким досліджуваного сигналу і має дати відповідь на питання про ступінь відмінності або співпадіння цих двох сигналів. Такий еталонний сигнал слід нормувати таким чином, щоб його максимальне та мінімальне значення дорівнювали $+1$ та -1 відповідно, що приведе його динамічний діапазон до динамічного діапазону трансформанти обраного для нормалізації ортогонального перетворення.

Для подальшого пояснення процедури нормалізації за кроком розглянемо простий трикутний сигнал (рис. 1,а), нормований таким чином, що його динамічний діапазон займає інтервал ± 1 . Довжина сигналу тотожна періоду обраної ортогональної функції з використовуваного перетворення (рис. 1,б).

Для простоти демонстрації ідеї нормалізації розглянемо дискретне косинусне перетворення формату $N = 8$. Матричний оператор $\overline{\overline{Cs}}$ такого косинусного перетворення наведено в таблиці 1. Точки 0 – 7 (рис. 1,б) відповідають стовпцям табл. 1, значення дискретних відліків (рис. 1,б) спроеціюємо (горизонтальні штрихові лінії) на нормований трикутник (рис. 1,а). Отримані на рис. 1,а точки відліків на трикутниках позначимо зірочками.

Оскільки тестовим є трикутний сигнал, то нумерацію відліків слід привести до номерів, позначених штрихами. Ці номери відповідають новим номерам на косинусній трансформанті (теж позначені штрихами на рис. 1,б). З рис. 1,а видно, що інтервали дискретизації трикутного сигналу стали нееквідистантними. Ці інтервали повинні також бути розраховані і надані (для даного еталонного сигналу) у вигляді таблиці.

Нормалізація дискретного косинусного перетворення тепер полягає у переставленні стовпців дискретного оператора $\overline{\overline{Cs}}$ (таблиця 1) у відповідності до нової нумерації (штрихами). Дискретний нормалізований матричний оператор $\overline{\overline{Cs}}_N$, отриманий з оператора $\overline{\overline{Cs}}$ (таблиця 1), наведено у таблиці 2.

Якщо взяти елементи рядка 1 у таблиці 2 і (з урахуванням нееквідистантних кроків дискретизації) розташувати їх вздовж осі часу, отримаємо дискретизований трикутний сигнал рис. 1,а.

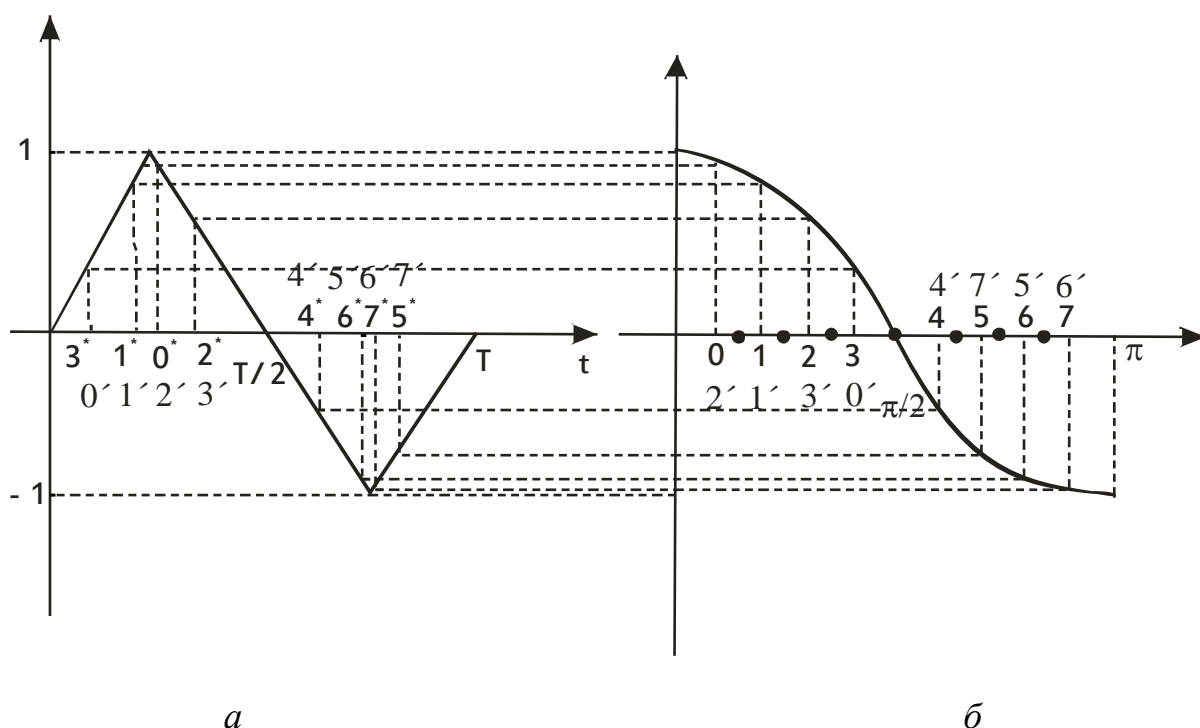


Рис. 1 Нормований сигнал трикутної форми (а) і перша трансформанта косинусного перетворення (б).

Таблиця 1.

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	$\cos \frac{\pi}{16}$	$\cos \frac{3\pi}{16}$	$\cos \frac{5\pi}{16}$	$\cos \frac{7\pi}{16}$	$\cos \frac{9\pi}{16}$	$\cos \frac{11\pi}{16}$	$\cos \frac{13\pi}{16}$	$\cos \frac{15\pi}{16}$
2	$\cos \frac{2\pi}{16}$	$\cos \frac{6\pi}{16}$	$\cos \frac{10\pi}{16}$	$\cos \frac{14\pi}{16}$	$\cos \frac{18\pi}{16}$	$\cos \frac{22\pi}{16}$	$\cos \frac{26\pi}{16}$	$\cos \frac{30\pi}{16}$
3	$\cos \frac{3\pi}{16}$	$\cos \frac{9\pi}{16}$	$\cos \frac{15\pi}{16}$	$\cos \frac{21\pi}{16}$	$\cos \frac{27\pi}{16}$	$\cos \frac{33\pi}{16}$	$\cos \frac{39\pi}{16}$	$\cos \frac{45\pi}{16}$
4	$\cos \frac{4\pi}{16}$	$\cos \frac{12\pi}{16}$	$\cos \frac{20\pi}{16}$	$\cos \frac{28\pi}{16}$	$\cos \frac{36\pi}{16}$	$\cos \frac{44\pi}{16}$	$\cos \frac{52\pi}{16}$	$\cos \frac{60\pi}{16}$
5	$\cos \frac{5\pi}{16}$	$\cos \frac{15\pi}{16}$	$\cos \frac{25\pi}{16}$	$\cos \frac{35\pi}{16}$	$\cos \frac{45\pi}{16}$	$\cos \frac{55\pi}{16}$	$\cos \frac{65\pi}{16}$	$\cos \frac{75\pi}{16}$
6	$\cos \frac{6\pi}{16}$	$\cos \frac{18\pi}{16}$	$\cos \frac{30\pi}{16}$	$\cos \frac{42\pi}{16}$	$\cos \frac{54\pi}{16}$	$\cos \frac{66\pi}{16}$	$\cos \frac{78\pi}{16}$	$\cos \frac{80\pi}{16}$
7	$\cos \frac{7\pi}{16}$	$\cos \frac{21\pi}{16}$	$\cos \frac{35\pi}{16}$	$\cos \frac{49\pi}{16}$	$\cos \frac{63\pi}{16}$	$\cos \frac{77\pi}{16}$	$\cos \frac{91\pi}{16}$	$\cos \frac{105\pi}{16}$

Таблиця 2.

	0'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'
0'	1	1	1	1	1	1	1	1
1'	$\cos \frac{5\pi}{16}$	$\cos \frac{3\pi}{16}$	$\cos \frac{7\pi}{16}$	$\cos \frac{\pi}{16}$	$\cos \frac{9\pi}{16}$	$\cos \frac{15\pi}{16}$	$\cos \frac{11\pi}{16}$	$\cos \frac{13\pi}{16}$
2'	$\cos \frac{10\pi}{16}$	$\cos \frac{6\pi}{16}$	$\cos \frac{14\pi}{16}$	$\cos \frac{2\pi}{16}$	$\cos \frac{18\pi}{16}$	$\cos \frac{30\pi}{16}$	$\cos \frac{22\pi}{16}$	$\cos \frac{26\pi}{16}$
3'	$\cos \frac{15\pi}{16}$	$\cos \frac{9\pi}{16}$	$\cos \frac{21\pi}{16}$	$\cos \frac{3\pi}{16}$	$\cos \frac{27\pi}{16}$	$\cos \frac{45\pi}{16}$	$\cos \frac{33\pi}{16}$	$\cos \frac{39\pi}{16}$
4'	$\cos \frac{20\pi}{16}$	$\cos \frac{12\pi}{16}$	$\cos \frac{28\pi}{16}$	$\cos \frac{4\pi}{16}$	$\cos \frac{36\pi}{16}$	$\cos \frac{60\pi}{16}$	$\cos \frac{44\pi}{16}$	$\cos \frac{52\pi}{16}$
5'	$\cos \frac{25\pi}{16}$	$\cos \frac{15\pi}{16}$	$\cos \frac{35\pi}{16}$	$\cos \frac{5\pi}{16}$	$\cos \frac{45\pi}{16}$	$\cos \frac{75\pi}{16}$	$\cos \frac{55\pi}{16}$	$\cos \frac{65\pi}{16}$
6'	$\cos \frac{30\pi}{16}$	$\cos \frac{18\pi}{16}$	$\cos \frac{42\pi}{16}$	$\cos \frac{6\pi}{16}$	$\cos \frac{54\pi}{16}$	$\cos \frac{90\pi}{16}$	$\cos \frac{66\pi}{16}$	$\cos \frac{78\pi}{16}$
7'	$\cos \frac{35\pi}{16}$	$\cos \frac{21\pi}{16}$	$\cos \frac{49\pi}{16}$	$\cos \frac{7\pi}{16}$	$\cos \frac{63\pi}{16}$	$\cos \frac{105\pi}{16}$	$\cos \frac{77\pi}{16}$	$\cos \frac{91\pi}{16}$

Тепер, якщо досліджуваний сигнал відрізняється від еталонного тільки масштабним множником і постійною складовою, то добутки відліків взятих з цього досліджуваного сигналу (з відомим нееквідистантним кроком) дадуть нульову (за номером) і першу трансформанту. Усі інші трансформанти нормалізованого перетворення дорівнюватимуть нулю.

Якщо форма сигналу (внаслідок певних неістотних спотворень) буде трошки відрізнятися від форми еталонного, то ненульовими будуть і інші (крім першої і нульової) трансформанти. Якщо відміни будуть суттєві, то вищі трансформанти будуть мати великі амплітуди.

Ступінь відміни форми досліджуваного сигналу від еталонного можна кількісно оцінити за допомогою коефіцієнта трансформант

$$k_{\text{тр}} = \sqrt{\sum_{k=0, k \neq 1}^{N-1} I_k^2 \times \varepsilon_k^2 / (I_1 \times \varepsilon_1)}, \quad (2)$$

де I_k – амплітуда k -ї трансформанти; ε_k – енергія k -ї трансформанти одиничної амплітуди.

Формула (2) є зручною для оцінки спотворень при використанні для аналізу тих самих сигналів різних ортогональних перетворень.

Енергію трансформанти одиничної амплітуди можна розрахувати за формулою

$$\varepsilon_k^2 = \sum_{n=0}^{N-1} s_k^2(n) \times \Delta t, \quad (3)$$

де $s_k(n)$ — відлік n -ї трансформанти.

Якщо різні сигнали порівнюються за єдиним нормалізованим перетворенням, можна використовувати спрощену форму коефіцієнта трансформації

$$k_{\text{тр}} = \sqrt{\sum_{k=2}^{N-1} I_k^2} / I_1. \quad (4)$$

Часто при пошуку сигналів, які певною мірою співпадають із еталонним зручно використовувати зворотну до коефіцієнта трансформант гостроту.

$$\Gamma = 1/k_{\text{тр}}. \quad (5)$$

В цьому випадку перевищення гостротою певного наперед наданого порогу дозволяє зробити висновок про наявність сигналу, близького до тестового (еталонного) і навпаки.

На завершення нагадаємо, що єдиною незручністю методу нормалізації за кроком є нееквідистантний крок дискретизації, що може бути незручно при дискретизації сигналу стандартними пристроями.

Нормалізація тестового сигналу за рівнем

Для кращого розуміння основні положення методу будемо розглядати на прикладі конкретного обраного ортогонального перетворення. Для цього оберемо перетворення Уолша-Корчмаржа. Для таких функцій нормалізацію “за кроком” виконати неможливо (оскільки трансформанти мають лише два значення: +1, -1).

Нехай тестовий сигнал має вигляд рис. 3, а формати (кількість відліків) тестового сигналу і функції Уолша – наприклад, ψ_1 (рис. 2), однакові. Поділимо відліки x_{test} на рис. 3 на корегуючі коефіцієнти

$$k_n = \frac{x_{\text{test}}(n)}{\psi(n)}, \quad k_n = x_{\text{test}}(n) / \psi(n) \quad (6)$$

Тоді сигнал рис.3 перетвориться на функцію ψ_1 на рис. 2. Корегуючі коефіцієнти наведено в табл. 3.

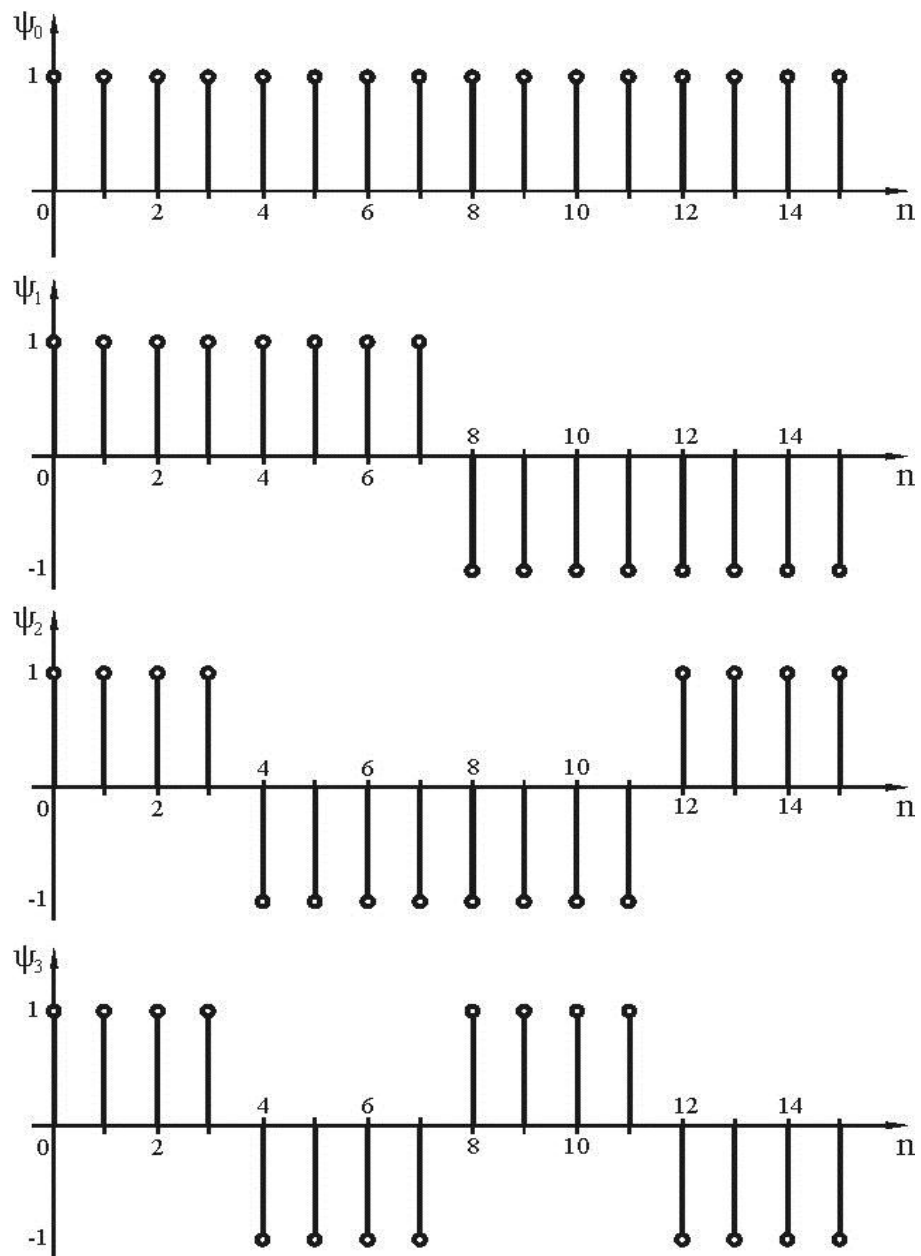


Рис. 2 Трансформанти (базисні функції) перетворення Уолша-Корчмаржа

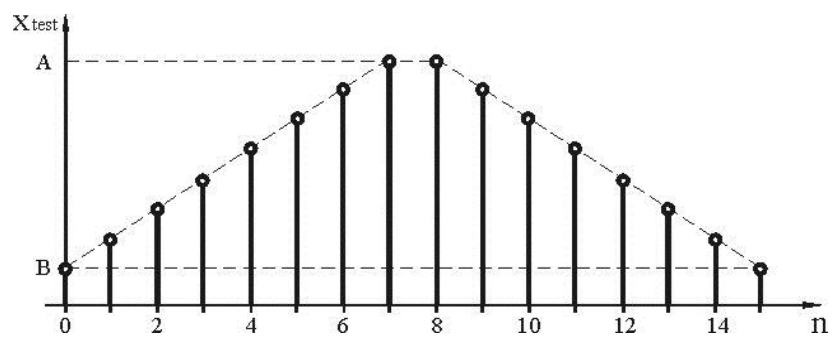


Рис. 3 Тестовий сигнал

Таблиця 3

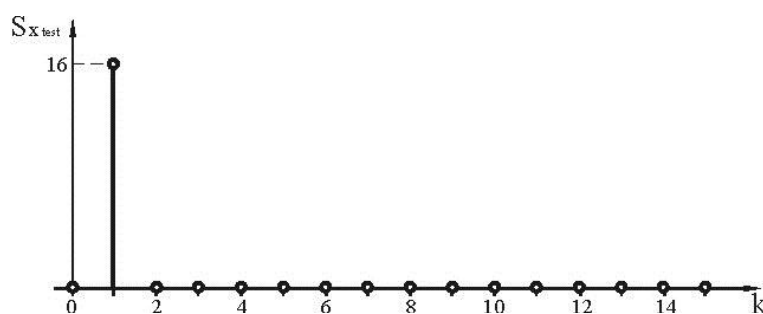
k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7
B	$B + (A - B)/7$	$B + 2(A - B)/7$	$B + 3(A - B)/7$	$B + 4(A - B)/7$	$B + 5(A - B)/7$	$B + 6(A - B)/7$	A

k_8	k_9	k_{10}	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}	k_{15}
$-A$	$-B - 6(A - B)/7$	$-B - 5(A - B)/7$	$-B - 4(A - B)/7$	$-B - 3(A - B)/7$	$-B - 2(A - B)/7$	$-B - (A - B)/7$	$-B$

Алгоритм нормалізації за рівнем має наступний вигляд.

1. Для тестового сигналу (відповідним чином нормованого) обрати ортогональне перетворення та базову трансформанту перетворення.
2. Для кожного з N відліків тестового сигналу і трансформанти знайти корегуючі коефіцієнти.
3. Поділити відліки невідомого досліджуваного сигналу на корегуючі коефіцієнти (якщо сигнал відрізняється від тестового лише амплітудою, одержимо трансформанту дискретного ортогонального перетворення тієї самої амплітуди).
4. Виконати глобальне перетворення скорегованого досліджуваного сигналу.
5. Якщо спектр перетворення містить лише амплітуду трансформанти, за якою проведено нормалізацію, то досліджуваний сигнал (з точністю до амплітуди) тотожний до тестового. Якщо спектр багатий і має велику кількість трансформант, співмірних з базовою для нормалізації, то досліджується сигнал, навіть не схожий на тестовий.

Так, наприклад, перетворення Уолша-Корчмаржа для сигналу x_{test} , зображеного на рис. 3 ($B=1, A=8$), після його нормалізації за трансформантою ψ_1 (рис. 3) має вигляд рис.4. В той самий час для сигналу, зображеного на рис. 5, одержимо спектр рис. 6. Для сигналу, зображеного на рис. 7, з адитивним шумом ($\sigma = 0,244923B$, значення відліків шуму $N(n)$ наведено в табл. 4) отримаємо спектр нормалізованого перетворення, зображений на рис. 8.

Рис. 4 Спектр сигналу x_{test}

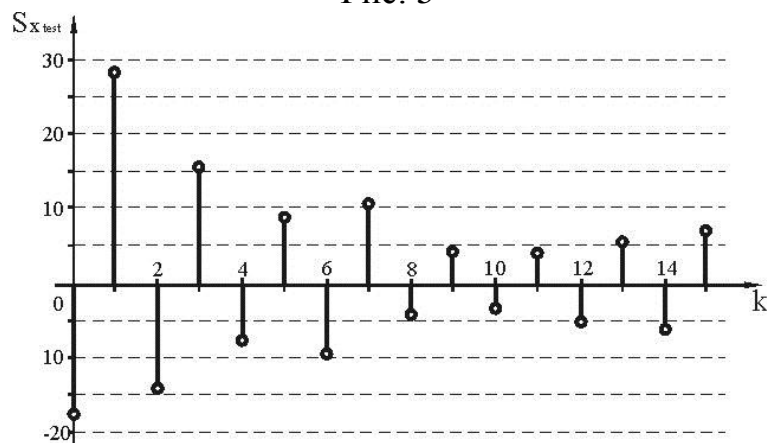
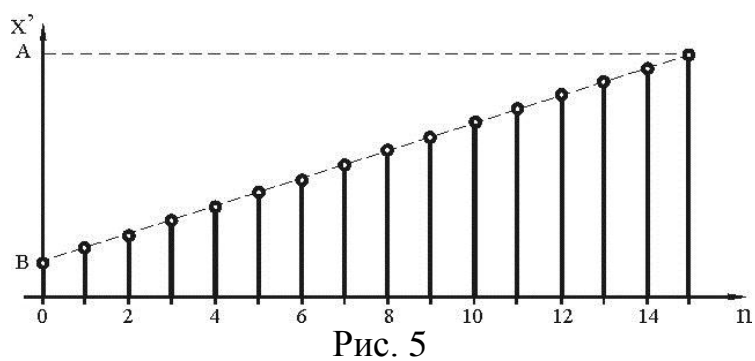
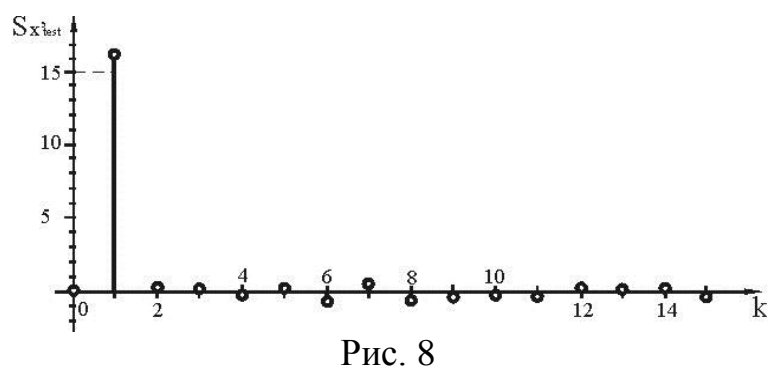
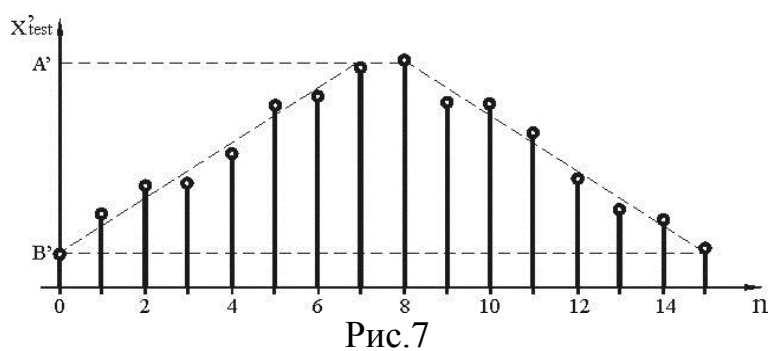


Табл. 4

N_0	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7
0	0.25	0.28	-0.19	-0.21	0.20	-0.19	-0.11

N_8	N_9	N_{10}	N_{11}	N_{12}	N_{13}	N_{14}	N_{15}
0.03	-0.50	0.48	0.37	-0.19	-0.38	0.22	0.05



На практиці може виникнути ситуація, коли сигнал, який досліджується, відрізняється від тестового на масштабний множник або містить “додаткову” постійну складову. Такий сигнал, змінений за допомогою масштабного множника і складової, насправді є тим сигналом, який нам потрібно знайти при обробці. Якщо в якості тестового сигналу виступають елементи зображення, то зміна масштабного множника відповідає зміні контрасту зображення, а додаткова постійна складова впливає на яскравість, тобто розбавленість зображення білим. Для того, щоб такий сигнал в результаті виконання нормалізованого перетворення Уолша-Корчмаржа був визнаний за тестовий, потрібно його центрувати (тобто знайти постійну складову досліджуваного сигналу і відняти її від досліджуваного сигналу), аналогічно, центрованим повинен бути і еталонний сигнал. При цьому обчислювати спектр і гостроту слід саме для такої пари сигналів. При наявності стаціонарного адитивного шуму з шумовим середнім, його додавання до досліджуваного сигналу не вплине на масштабування коефіцієнтів нормалізації.

Оцінку відмін сигналів (викликаних спотвореннями каналів передачі, адитивним шумом тощо) також можна провести за коефіцієнтом трансформант:

$$k_{\text{тр}} = \sqrt{\sum_{i \neq n}^{N-1} A_i^2 / A_n}, \quad (7)$$

де A_n – амплітуда трансформанти, за якою проводилася нормалізація.

Так, для сигналу рис.2.3 $k_{\text{тр}}=0$, для сигналу рис. 7 $k_{\text{тр}}=1.232945$, а для сигналу рис. 5 $k_{\text{тр}} \gg 1$.

Наведений приклад нормалізації, що ілюструє запропонований метод, побудовано на трансформанті перетворення Уолша-Корчмаржа, але ясно, що як базову можна прийняти трансформанту будь-якого ортогонального перетворення.

Нормальне одновимірне перетворення

Розглянемо можливість створення дискретного ортогонального перетворення, для якого одна із трансформант збігалася б з наперед заданим дискретним сигналом довільної форми, а, отже, спектр такого перетворення містив би лише одну ненульову складову. Таке ортогональне перетворення у подальшому будемо називати нормальним [9 – 13].

Матричний оператор дискретного нормального перетворення першого виду

Для визначеності й наочності ілюстрації процедури побудови

нормального перетворення виберемо формат перетворення N рівним восьми (що дозволить надалі узагальнити отриманий результат на довільний формат $N=2^n$, де n – ціле додатне число). Формат перетворення і формат сигналу збігаються. Тому нехай сигнал $x(t)$ на періоді, рівному тривалості сигналу, задано вектором відліків $\overline{X_0}=[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, де T – знак транспонування. Для формату $N=8$ $\overline{X_0}=[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8]^T$.

Для одержання нормального перетворення сигналу $\overline{X_0}$ проведемо ряд перетворень, при кожному з яких кількість ненульових трансформант у порівнянні з вихідним сигналом буде зменшуватися вдвічі.

Першим з таких перетворень $\overline{W_1}$ буде блочно-діагональна матриця, головна діагональ якої складається із блоків $\overline{W_1}^{(i)} = \begin{bmatrix} x_{i+1} & x_{i+2} \\ -x_{i+2} & x_{i+1} \end{bmatrix}$.

Для формату $N=8$ ця матриця матиме вигляд

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	x_1	x_2						
2	$-x_2$	x_1						
3			x_3	x_4				
4			$-x_4$	x_3				
5					x_5	x_6		
6					$-x_6$	x_5		
7							x_7	x_8
8							$-x_8$	x_7

Для забезпечення ортогональності рядків матриці $\overline{W_1}$ достатньо забезпечити ортогональність лише кожної пари рядків: 1-го та 2-го, 3-го та 4-го, 5-го та 6-го і т.д., оскільки рядки 1 і 2 завжди ортогональні по відношенню до рядків 3, 4, 5, 6 тощо внаслідок того, що вони належать до різних блоків діагоналі матриці $\overline{W_1}$.

Так, при перевірці на ортогональність першого рядка з другим та третього з четвертим, отримаємо скалярні добутки:

$$x_1(-x_2) + x_2x_1 = 0 \text{ і } x_3(-x_4) + x_4x_3 = 0.$$

У результаті перемноження матриці $\overline{\overline{W_1}}$ і вектора $\overline{X_0}$ одержимо стовпець першого (із серії) перетворення $\overline{X_1} = \overline{\overline{W_1}} \cdot \overline{X_0}$, де для $N=8$

$$\overline{X_1} = [(x_1^2 + x_2^2), 0, (x_3^2 + x_4^2), 0, (x_5^2 + x_6^2), 0, (x_7^2 + x_8^2), 0]^T.$$

Для забезпечення ортогональності кратного перетворення матрицю $\overline{\overline{W_1}}$ слід нормувати, для чого знайдемо добуток $\overline{\overline{W_1}} \cdot \overline{\overline{W_1}}^T = \text{diag}\{\overline{\varepsilon_1}\}$, де $\text{diag}\{\overline{\varepsilon_1}\}$ - діагональна матриця з елементами головної діагоналі $(x_1^2 + x_2^2)$, $(x_1^2 + x_2^2)$, $(x_3^2 + x_4^2)$, $(x_3^2 + x_4^2)$, $(x_5^2 + x_6^2)$, $(x_5^2 + x_6^2)$, $(x_7^2 + x_8^2)$, $(x_7^2 + x_8^2)$.

Поділивши рядки матриці $\overline{\overline{W_1}}$ на відповідні значення $(x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2)^{1/2}$ діагоналі, одержимо матрицю $\overline{\overline{W_{1N}}}$, таку, що $\overline{\overline{W_{1N}}} \cdot \overline{\overline{W_{1N}}}^T = \overline{\overline{W_{1N}}}^T \cdot \overline{\overline{W_{1N}}} = \overline{E}$, де \overline{E} - одинична матриця. Для $N=8$ матриця $\overline{\overline{W_{1N}}}$ представляє собою:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	x_1/a	x_2/a						
2	$-x_2/a$	x_1/a						
3			x_3/b	x_4/b				
4			$-x_4/b$	x_3/b				
5					x_5/c	x_6/c		
6					$-x_6/c$	x_5/c		
7							x_7/d	x_8/d
8							$-x_8/d$	x_7/d

де $a = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $b = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$, $c = \sqrt{x_5^2 + x_6^2}$, $d = \sqrt{x_7^2 + x_8^2}$.

Тоді частково нормалізований (із чотирма нульовими значеннями) спектр $\overline{X_{1N}} = \overline{\overline{W_{1N}}} \cdot \overline{X_0}$ має вигляд

$$\overline{X_{1N}} = [\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, 0, \sqrt{x_3^2 + x_4^2}, 0, \sqrt{x_5^2 + x_6^2}, 0, \sqrt{x_7^2 + x_8^2}, 0]^T.$$

Для перетворення ненульових значень сигналу $\overline{X_{1N}}$ побудуємо матрицю $\overline{\overline{W_2}}$, аналогічно тому, як це було зроблено для матриці $\overline{\overline{W_1}}$. Тобто друге перетворення $\overline{\overline{W_2}}$ являє собою матрицю, де елементи, номери рядків і

стовпців яких відповідають ненульовим елементам вектора $\overline{X_{1N}}$, мають значення $w_{11} = w_{33} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $w_{13} = -w_{31} = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$, $w_{55} = w_{77} = \sqrt{x_5^2 + x_6^2}$, $w_{57} = -w_{75} = \sqrt{x_7^2 + x_8^2}$. Діагональні ж елементи, що відповідають нулям вектора $\overline{X_{1N}}$, у загальному випадку можна замінити будь-якими числами, оскільки це не вплине на результат другого перетворення. Але залишити їх нульовими не можна, оскільки результуючу матрицю $\overline{\overline{W_{\Sigma N}}}$ нормального перетворення будемо одержувати перемноженням матриць всіх часткових перетворень $\overline{\overline{W_{iN}}}$. А $\overline{\overline{W_{\Sigma N}}}$ не повинна містити нульових рядків або(та) стовпців, оскільки при цьому матриця зворотного перетворення $\overline{\overline{W_{\Sigma N}}}^{-1}$ не існуватиме.

У даному випадку покладемо діагональні елементи матриці $\overline{\overline{W_2}}$, що відповідають нулям вектора $\overline{X_{1N}}$, рівними одиницям. Матричний оператор нормального перетворення, що спиратиметься на таку матрицю $\overline{\overline{W_2}}$ часткового перетворення назвемо матричним оператором першого виду.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$		$\sqrt{x_3^2 + x_4^2}$					
2		1						
3	$-\sqrt{x_3^2 + x_4^2}$		$\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$					
4				1				
5					$\sqrt{x_5^2 + x_6^2}$		$\sqrt{x_7^2 + x_8^2}$	
6						1		
7					$-\sqrt{x_7^2 + x_8^2}$		$\sqrt{x_5^2 + x_6^2}$	
8								1

Тепер спектр $\overline{X_2}$ другого часткового перетворення $\overline{\overline{W_2}} \cdot \overline{X_1} = \overline{X_2}$

$$\overline{X_2} = [(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2), 0, 0, 0, (x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2), 0, 0, 0]^T.$$

Пронормуємо $\overline{\overline{W_2}}$:

$$\overline{\overline{W_2}} \cdot \overline{\overline{W_2}}^T = \text{Diag}((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2), 1, (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2), 1, (x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2), 1, (x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2), 1,$$

$$(x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2), 1, \}.$$

Тобто при нормуванні перший та третій рядки матриці $\overline{\overline{W_2}}$ слід розділити на $\alpha = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$, а п'ятий та сьомий відповідно на $\beta = \sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}$. Таким чином отримаємо нормовану матрицю $\overline{\overline{W_{2N}}}$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\alpha}$		$\frac{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{\alpha}$					
2		1						
3	$-\frac{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{\alpha}$		$\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\alpha}$					
4				1				
5					$\frac{\sqrt{x_5^2 + x_6^2}}{\beta}$		$\frac{\sqrt{x_7^2 + x_8^2}}{\beta}$	
6						1		
7					$-\frac{\sqrt{x_7^2 + x_8^2}}{\beta}$		$\frac{\sqrt{x_5^2 + x_6^2}}{\beta}$	
8								1

Після відповідного нормування матриці другого перетворення одержимо вектор $\overline{X_{2N}}$, що містить ненульові елементи в першому рядку

$$x_{N2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} \text{ і в п'ятому рядку } x_{N5} = \sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}$$

$$\overline{X_{2N}} = [\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}, 0, 0, 0, \sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}, 0, 0, 0]^T.$$

Для двох ненульових елементів, що залишилися, побудуємо матрицю $\overline{\overline{W_3}}$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$				$\sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}$			
2		1						
3			1					

$\overline{\overline{W}}_3 =$	4				1				
	5	$-\sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}$				$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$			
	6						1		
	7							1	
	8								1

$$\overline{\overline{W}}_3 \cdot \overline{\overline{W}}_3^T = \text{Diag} \left\{ (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2), 1, 1, 1, \right. \\ \left. (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2), 1, 1, 1, \right\}.$$

Аналогічно до попередніх кроків, після нормування одержимо $\overline{\overline{W}}_{3N}$

		1		2	3	4		5		6	7	8
$\overline{\overline{W}}_{3N} =$	1	$\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}}{A}$					$\frac{\sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}}{A}$					
	2		1									
	3			1								
	4				1							
	5	$-\frac{\sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}}{A}$					$\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}}{A}$					
	6								1			
	7									1		
	8											1

де $A = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}$.

Результуюче нормальне перетворення має вигляд

$$\overline{\overline{W}}_{\Sigma N} = \overline{\overline{W}}_{3N} \cdot \overline{\overline{W}}_{2N} \cdot \overline{\overline{W}}_{1N}, \quad (8)$$

де

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\frac{x_1}{A}$	$\frac{x_2}{A}$	$\frac{x_3}{A}$	$\frac{x_4}{A}$	$\frac{x_5}{A}$	$\frac{x_6}{A}$	$\frac{x_7}{A}$	$\frac{x_8}{A}$
2	$\frac{-x_2}{a}$	$\frac{x_1}{a}$						
3	$\frac{-x_1 \cdot b}{a \cdot \alpha}$	$\frac{-x_2 \cdot b}{a \cdot \alpha}$	$\frac{x_3 \cdot a}{b \cdot \alpha}$	$\frac{x_4 \cdot a}{b \cdot \alpha}$				
4			$\frac{-x_4}{b}$	$\frac{x_3}{b}$				
5	$\frac{-x_1 \cdot \beta}{\alpha \cdot A}$	$\frac{-x_2 \cdot \beta}{\alpha \cdot A}$	$\frac{-x_3 \cdot \beta}{\alpha \cdot A}$	$\frac{-x_4 \cdot \beta}{\alpha \cdot A}$	$\frac{x_5 \cdot \alpha}{\beta \cdot A}$	$\frac{x_6 \cdot \alpha}{\beta \cdot A}$	$\frac{x_7 \cdot \alpha}{\beta \cdot A}$	$\frac{x_8 \cdot \alpha}{\beta \cdot A}$
6					$\frac{-x_6}{c}$	$\frac{x_5}{c}$		
7					$\frac{-x_5 \cdot d}{c \cdot \beta}$	$\frac{-x_6 \cdot d}{c \cdot \beta}$	$\frac{x_7 \cdot c}{d \cdot \beta}$	$\frac{x_8 \cdot c}{d \cdot \beta}$
8							$\frac{-x_8}{d}$	$\frac{x_7}{d}$

де $a = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $b = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$, $c = \sqrt{x_5^2 + x_6^2}$, $d = \sqrt{x_7^2 + x_8^2}$,

$\alpha = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$, $\beta = \sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}$, $A = \sqrt{\sum_{i=1}^8 x_i^2}$,

а спектр отриманого нормального перетворення $\overline{X_{NN}}$ буде являти собою

$$\overline{W_{\Sigma N}} \cdot \overline{X_0} = \overline{X_{NN}} = \left[\sqrt{\sum_{i=1}^8 x_i^2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right]^T.$$

При великому форматі N сигналу $\overline{X_0}$, кількість часткових перетворень $\overline{W_{iN}}$ при формуванні матричного оператора нормального перетворення в (8) збільшиться, тобто для формату $N=2^n$ кількість часткових операторів буде дорівнювати n .

Приклад 1. Як приклад побудови трансформант нормального перетворення розглянемо математичне очікування періоду пульсової хвилі людини до паління (рис. 2.9), віднесено до нульового початкового відліку, зведено до одиничної величини розмаху та представлену у форматі $N=32$.

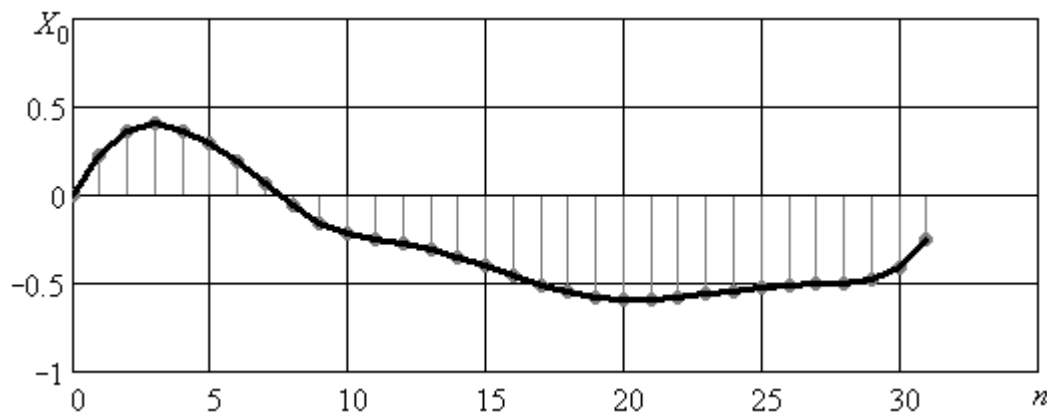
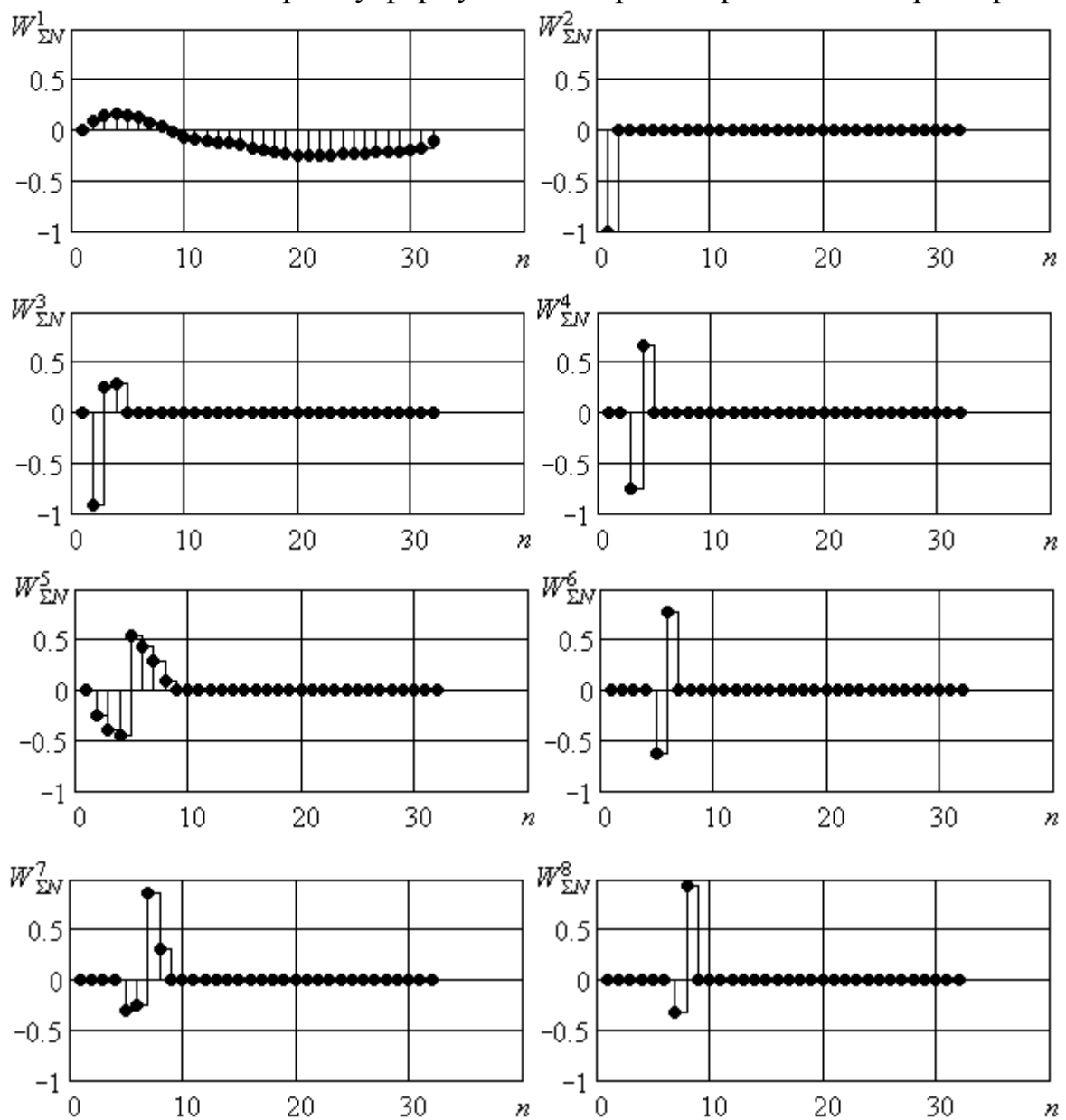
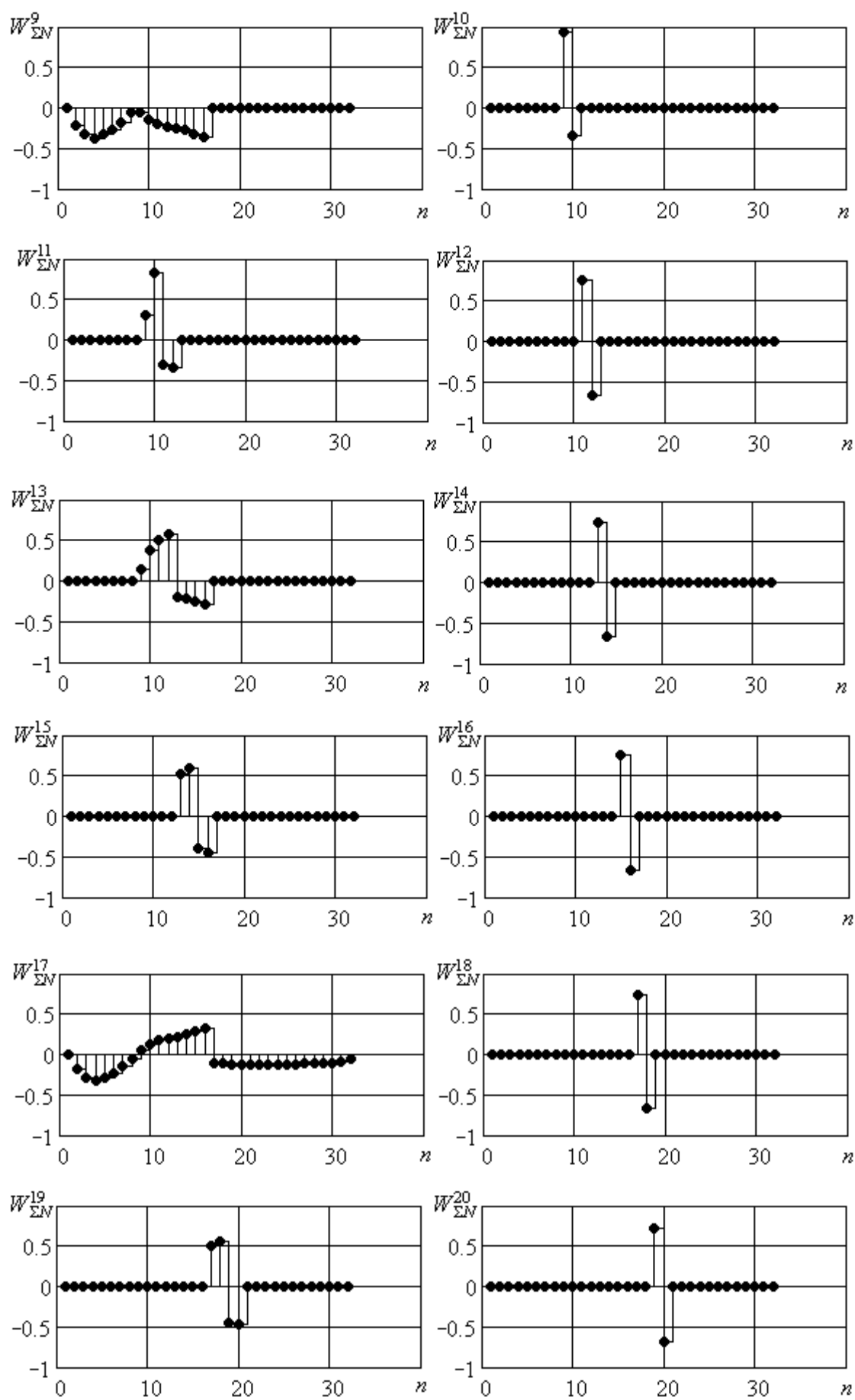
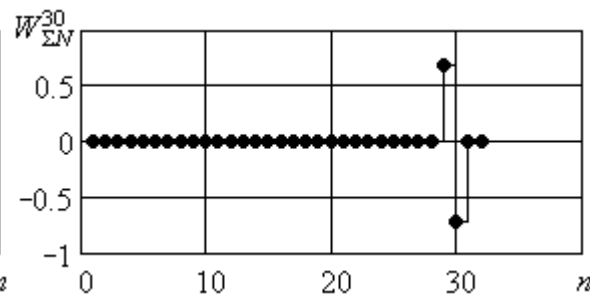
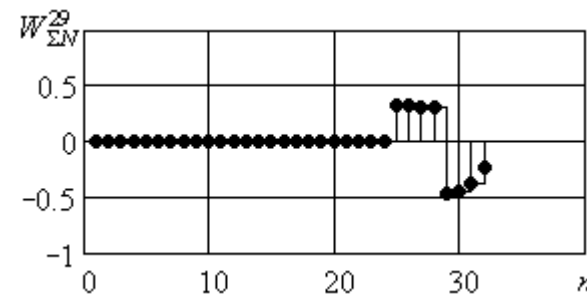
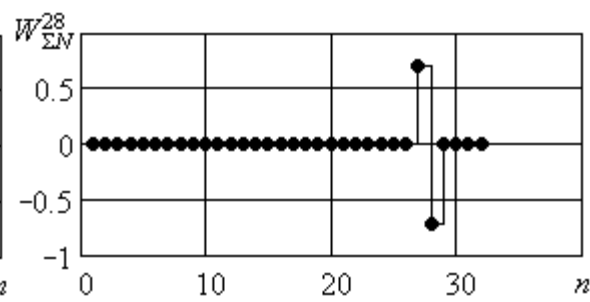
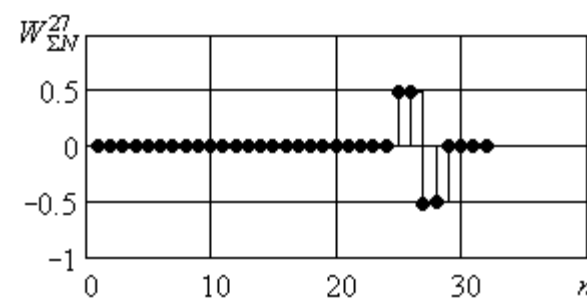
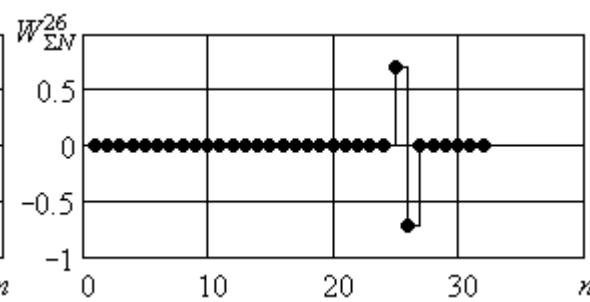
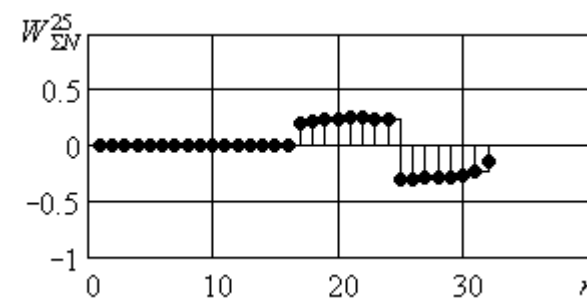
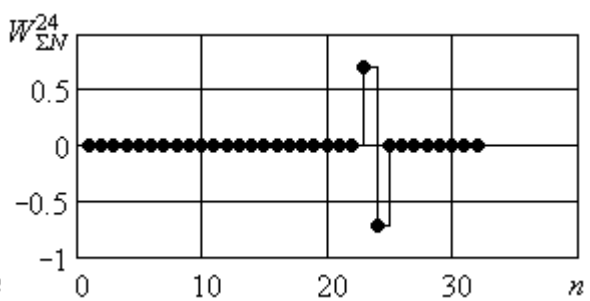
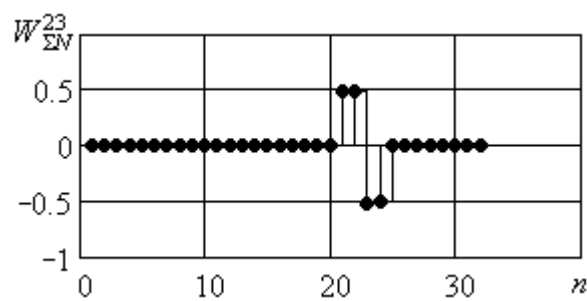
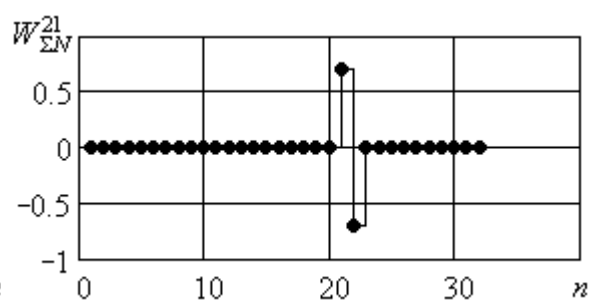
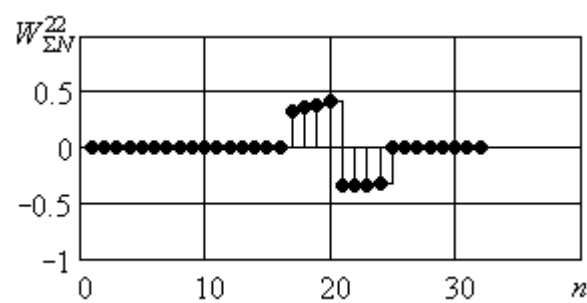


Рис. 9. Пульсограма, що взята як еталонний сигнал для формування матриці перетворення

На рис. 9 наведено трансформанти отриманого за допомогою описаного вище алгоритму формування матриці нормального перетворення.







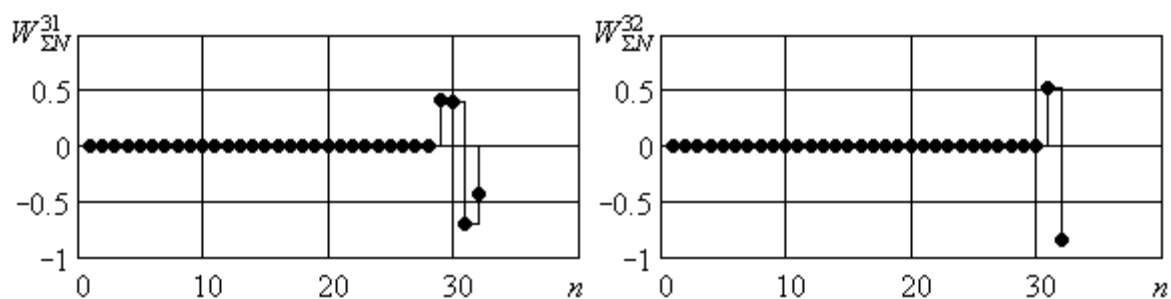


Рис. 9. Трансформанти нормального перетворення для математичного очікування трансформанти рис. 8.

Як видно з рис. 9, перша трансформанта матриці перетворення з точністю до постійного масштабного множника збігається з пульсограмою рис. 8, і всі трансформанти перетворення рис. 9 ортогональні, про що свідчить спектр перетворення $\overline{W_{\Sigma N}}$ на рис. 10.

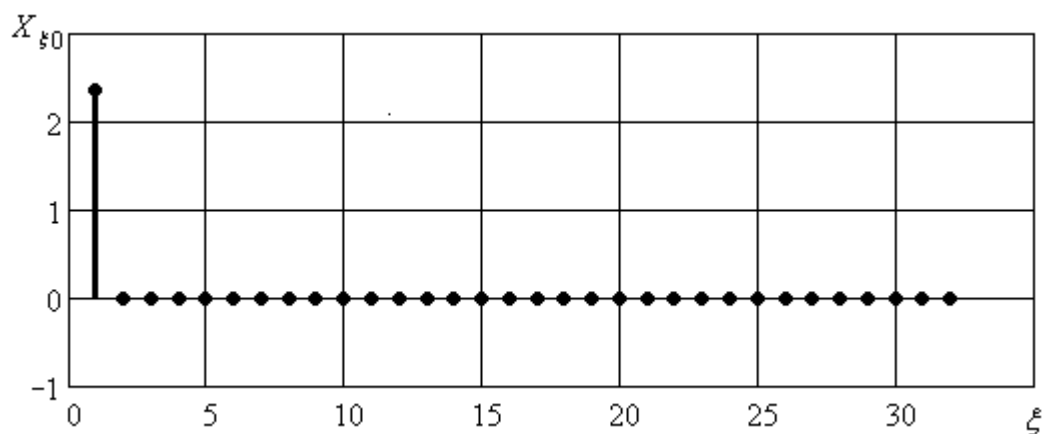
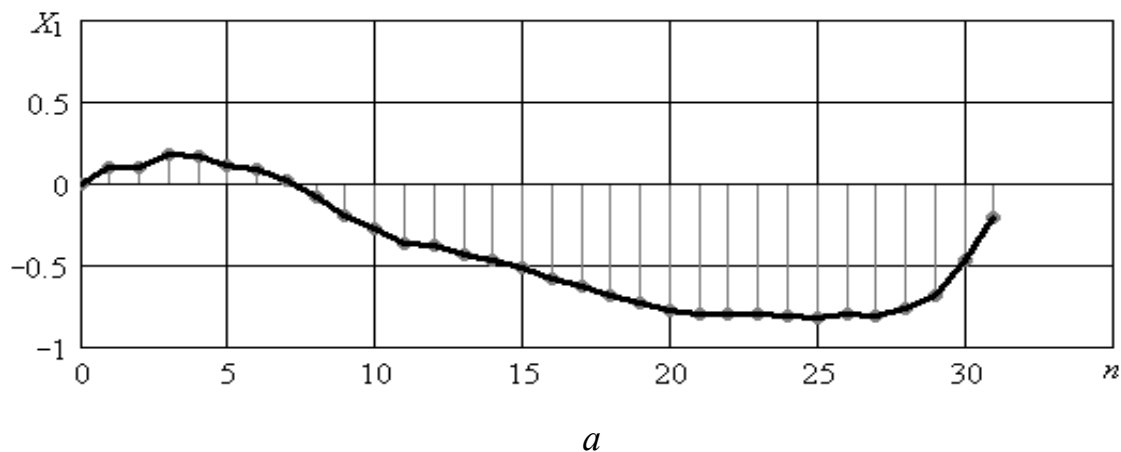


Рис. 10. Спектр еталонного сигналу при нормальному перетворенні.

На рис. 11 наведено окремо взятий період пульсової хвилі людини відразу після паління (рис. 11а) та період пульсової хвилі людини через 5 хвилин після паління (рис. 11б), віднесені до нульового початкового відліку, зведені до одиничної величини розмаху та представлені у форматі $N=32$.



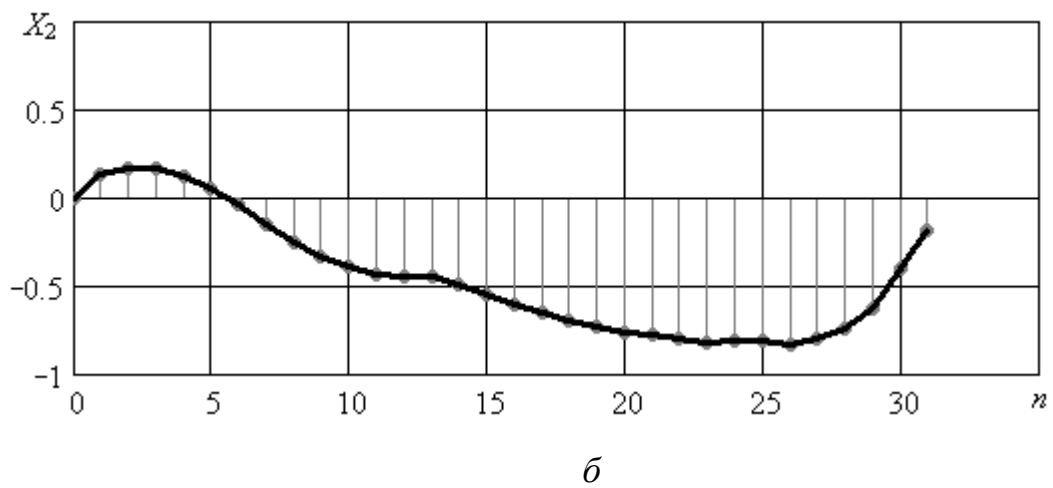


Рис. 11. Окремо взятий період пульсової хвилі людини відразу після паління (*a*) та через 5 хвилин після паління (*б*)

Їх спектри нормального перетворення наведені на рис. 2.12 *a* та *б* відповідно.

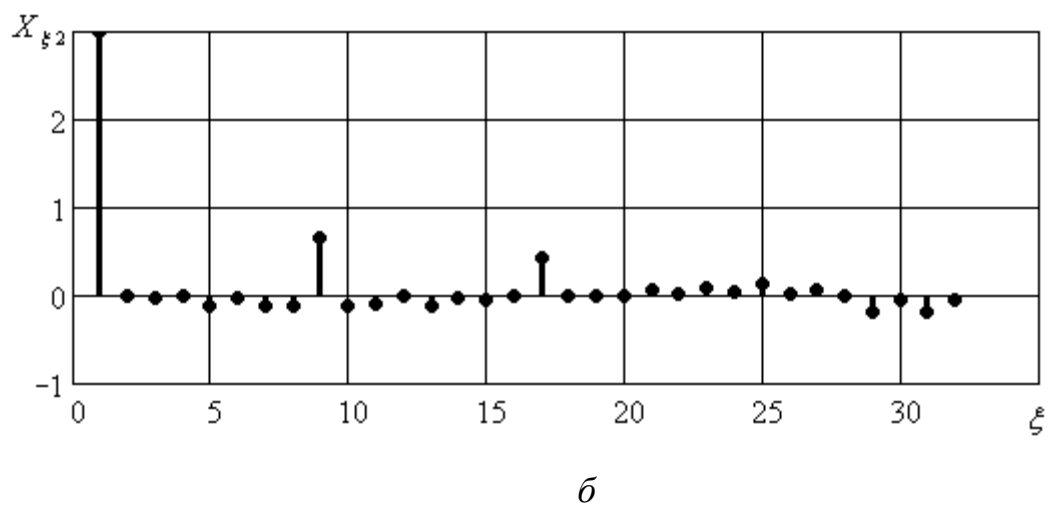
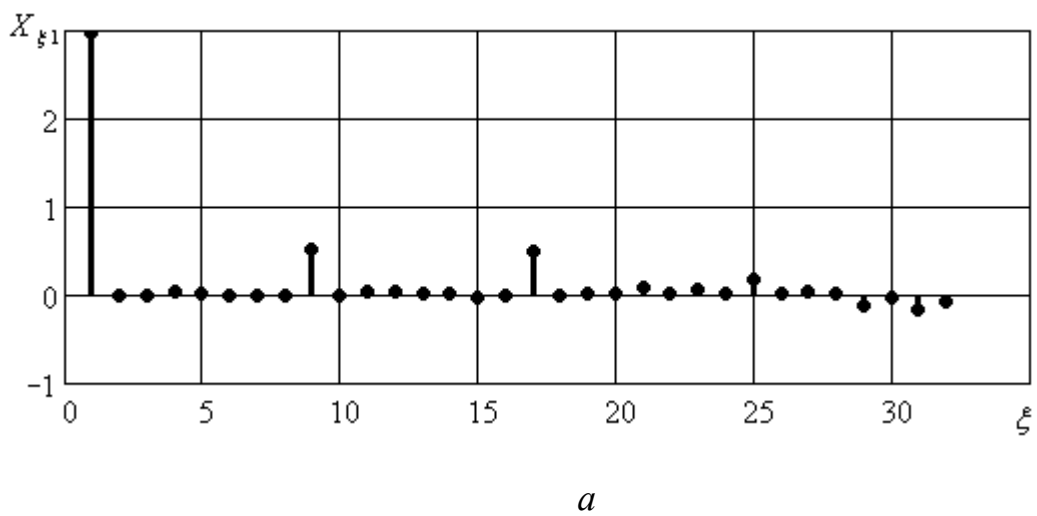


Рис. 12. Спектри нормального перетворення періодів пульсової хвилі рис 2.11 *a* та *б* відповідно.

На рис. 12 в спектрах нормального перетворення періодів пульсової хвилі людини відразу та через 5 хвилин після паління, як і очікувалося, можна спостерігати трансформанти вищих порядків, поява яких спричинена зміною стану судинної системи людини в результаті паління.

Приклад 2. Відзначимо, що, якщо в основу побудови матриці нормального перетворення по вищенаведеному алгоритму покласти одиницю, постійну на періоді, то воно з точністю до знаку збігатиметься з перетворенням Уолша-Адамара.

$$\overline{\overline{W}}_{\Sigma N} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\overline{W}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

При формуванні блочно-діагональної матриці першого часткового нормального перетворення розташування знаків було б наступним:

$$\overline{\overline{W}}_1^{(i)} = \begin{bmatrix} x_{i+1} & x_{i+2} \\ x_{i+2} & -x_{i+1} \end{bmatrix}.$$

Алгоритм безпосереднього формування матричного оператора нормального перетворення

На основі аналізу вигляду матриць нормального перетворень різних порядків, можна скласти алгоритм безпосереднього формування цієї матриці, не вдаючись до обчислення матриць нижчих порядків й знаходження їх добутку, тому що для великих значень N цей процес є досить трудомістким. Крім того, отримані в символьному вигляді матриці нормального перетворення мають елементи зі скороченими загальними множниками та приведеними подібними членами. Отже, чисельне формування матричного оператора призвело би до значного накопичення похибок за рахунок обмеженої розрядності операндів.

Покроковий процес формування матриці нормального перетворення зводиться до створення операторів часткових перетворень, кожне з яких зменшує кількість ненульових складових у спектрі тестового сигналу вдвічі. Слід зазначити, що при форматі N вхідного сигналу ($N = 2^n$, де n – ціле число), кількість кроків формування матриць часткових перетворень дорівнюватиме n , отже при реалізації такого способу отримання матриці нормального перетворення на ПЕОМ буде накопичуватися операційна похибка. До того ж цей процес є досить трудомістким. Саме тому слід розглянути можливість створення алгоритму безпосереднього генерування матриці нормального перетворення, не вдаючись до створення операторів проміжних стадій.

При покроковому формуванні матриці нормального перетворення деякого формату N , в основу якого покладено дискретні відліки тестового сигналу $\overline{X_0}$, результуючий оператор перетворення одержано як добуток операторів часткових перетворень. Так, для формату $N = 4$ ми маємо тестовий сигнал у вигляді

$$\overline{X_0} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T,$$

тоді матриця нормального перетворення матиме вигляд добутку

$$\overline{\overline{W_{\Sigma N}}} = \overline{\overline{W_{2N}}} \cdot \overline{\overline{W_{1N}}},$$

де $\overline{\overline{W_{1N}}}$ та $\overline{\overline{W_{2N}}}$ – оператори покрокових перетворень, що для заданого N мають вигляд

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{W}}_{1N} &= \begin{bmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}} & \frac{x_4}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}} \\ 0 & 0 & -\frac{x_4}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}} & \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}} \end{bmatrix}, \\
\overline{\overline{W}}_{2N} &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 & \frac{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 & \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} \end{bmatrix}. \quad (10)
\end{aligned}$$

Зберігаючи ортогональність рядків матриці $\overline{\overline{W}}_{2N}$ її також можна подати у вигляді

$$\overline{\overline{W}}_{2N} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 & \frac{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} \\ \frac{-\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 & \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} \end{bmatrix},$$

або

$$\overline{\overline{W}}_{2N} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 & \frac{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 & \frac{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} \\ \frac{-\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 & \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{x_3^2 + x_4^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} & 0 & \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

При цьому спектр тестового сигналу так само матиме єдину складову в базисі запропонованого перетворення, а відмінність між результуючими операторами перетворень полягатиме у тому, що при використанні виразу (10) матриця нормального перетворення матиме у складі своїх трансформант, як було показано на рис. 9, “нулі”, кількість яких буде різнитися від рядка до рядка, тоді як при використанні виразу (11) всі комірочки матриці будуть заповнені ненульовими значеннями (рис. 13). Для зручності матричний оператор нормального перетворення, що спирається на вираз (10) було названо матричним оператором першого виду, а матричний оператор, що спирається на вираз (11) – матричним оператором другого виду.

Відтак, для формату $N = 4$ матриця нормального перетворення першого виду матиме вигляд:

$$\overline{\overline{W}}_{4N} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{A} & \frac{x_2}{A} & \frac{x_3}{A} & \frac{x_4}{A} \\ -\frac{x_2}{a} & \frac{x_1}{a} & 0 & 0 \\ \frac{-x_1 \cdot b}{a \cdot A} & \frac{-x_2 \cdot b}{a \cdot A} & \frac{x_3 \cdot a}{b \cdot A} & \frac{x_4 \cdot a}{b \cdot A} \\ 0 & 0 & -\frac{x_4}{b} & \frac{x_3}{b} \end{bmatrix},$$

а матриця нормального перетворення другого виду:

$$\overline{\overline{W}}_{4N} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{A} & \frac{x_2}{A} & \frac{x_3}{A} & \frac{x_4}{A} \\ -\frac{x_2}{A} & \frac{x_1}{A} & -\frac{x_4}{A} & \frac{x_3}{A} \\ \frac{-x_1 \cdot b}{a \cdot A} & \frac{-x_2 \cdot b}{a \cdot A} & \frac{x_3 \cdot a}{b \cdot A} & \frac{x_4 \cdot a}{b \cdot A} \\ \frac{x_2 \cdot b}{a \cdot A} & -\frac{x_1 \cdot b}{a \cdot A} & -\frac{x_4 \cdot a}{b \cdot A} & \frac{x_3 \cdot a}{b \cdot A} \end{bmatrix},$$

де $a = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $b = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$, $A = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$.

Пристаючи до опису алгоритмів безпосереднього генерування матриць дискретного нормального перетворення першого та другого видів зауважимо, що виходячи з розгляду символічних виразів матричних операторів різних порядків, алгоритм формування матриці нормального перетворення має єдиний вигляд для кожного виду.

Отже, запропонована процедура створення матричного оператора нормального перетворення другого виду передбачає наступні кроки:

1. Генерувати матрицю $\overline{\overline{W}}_n$ Адамара N -го порядку, знаки одиниць якої (+1 чи -1) будуть відповідати знакам елементів, що містяться у відповідних клітинах матриці нормального перетворення.
2. Домножити елементи матриці Адамара на дискретні відліки сигналу $\overline{X}_0 = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$, при чому в усіх непарних рядках (відлік рядків та стовпців ведемо з одиниці) порядок розташування елементів x_i вектору \overline{X}_0 залишити незмінним;
тоді як в усіх парних рядках в кожній парі дискретних відліків їх позиції поміняти місцями, тобто $(x_2, x_1, x_4, x_3, \dots, x_N, x_{N-1})$. Після проведення цих операцій одержимо матрицю $\overline{\overline{W}}_x$.
3. Обчислити коефіцієнти $\alpha_1^{(1)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\alpha_2^{(1)} = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$, ..., $\alpha_{N/2}^{(1)} = \sqrt{x_{N-1}^2 + x_N^2}$ для всіх пар відліків, починаючи з першої;
 $\alpha_1^{(2)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$, $\alpha_2^{(2)} = \sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}$, ..., $\alpha_{N/4}^{(2)} = \sqrt{x_{N-3}^2 + x_{N-2}^2 + x_{N-1}^2 + x_N^2}$ для всіх часткових послідовностей по чотири відліки;
 $\alpha_1^{(3)} = \sqrt{\sum_{i=1}^8 x_i^2}$, $\alpha_2^{(3)} = \sqrt{\sum_{i=1}^8 x_{i+8}^2}$, ..., $\alpha_{N/8}^{(3)} = \sqrt{\sum_{i=1}^8 x_{N-i+1}^2}$ для всіх часткових послідовностей по вісім відліків з вектору \overline{X} і т.д.;
нарешті
 $\alpha_1^{(n-1)} = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$,
де $N = 2^n$.
4. Матрицю $\overline{\overline{W}}_x$, одержану в п.2 алгоритму, помножити на коефіцієнти $\alpha_i^{(k)}$ наступним чином:
 - а). всі елементи матриці $\overline{\overline{W}}_x$ множаться на коефіцієнт $1/\alpha_1^{N-1}$;
 - б). з кожних чотирьох рядків для двох останніх (3-го та 4-го, 7-го та 8-го, 11-го та 12-го та ін. рядків) всі пари елементів, що утворюють часткові послідовності по чотири елементи множаться на коефіцієнт $\frac{\alpha_2^{(1)}}{\alpha_1^{(1)}}$ для першої пари першої четвірки та на $\frac{\alpha_1^{(1)}}{\alpha_2^{(1)}}$ для другої пари першої

четвірки, на $\frac{\alpha_4^{(1)}}{\alpha_3^{(1)}}$ для першої пари другої четвірки та на $\frac{\alpha_3^{(1)}}{\alpha_4^{(1)}}$ для другої

четвірки і т.д.. Остання четвірка множиться на $\frac{\alpha_{n/2}^{(1)}}{\alpha_{n/2-1}^{(1)}}$ (перша пара) та

на $\frac{\alpha_{n/2-1}^{(1)}}{\alpha_{n/2}^{(1)}}$ (друга пара);

в). з кожних восьми рядків чотири останніх (5-й-8-й, 13-й-16-й, 21-й-24-й та ін. рядки) множаться по часовим послідовностям, утвореним з восьми елементів в першій четвірці першої вісімки кожного рядка на $\frac{\alpha_2^{(2)}}{\alpha_1^{(2)}}$ та в другій четвірці – на $\frac{\alpha_1^{(2)}}{\alpha_2^{(2)}}$. Для першої четвірки другої вісімки

– на $\frac{\alpha_4^{(2)}}{\alpha_3^{(2)}}$ та на $\frac{\alpha_3^{(2)}}{\alpha_4^{(2)}}$ для другої четвірки і т.д.;

г). з кожних шістнадцяти рядків вісім останніх (9-й-16-й, 25-й-32-й та ін. рядки) для першої часткової послідовності (кожного рядка) з 16

елементів множаться на $\frac{\alpha_2^{(3)}}{\alpha_1^{(3)}}$ (перші вісім елементів рядка) та на $\frac{\alpha_1^{(3)}}{\alpha_2^{(3)}}$

друга вісімка першої групи з 16 елементів і т.д.;

...

д). останні $N/2$ рядка матриці множаться на $\frac{\alpha_2^{(n-2)}}{\alpha_1^{(n-2)}}$ для перших $N/2$

елементів кожного рядка та на $\frac{\alpha_1^{(n-2)}}{\alpha_2^{(n-2)}}$ – для останніх.

Перейдемо до алгоритму створення матриці нормального перетворення першого виду:

1. Обчислити кількість та визначити місце розташування ненульових елементів матриці наступним чином. Кількість ненульових елементів кожного рядка буде залежати від номеру рядку за наступним правилом: якщо число $(i-1)$, де i – номер відповідного рядку, без остачі ділиться на число $k/2$, де $k = 2^n$, $n = 1, 2, \dots, \log_2 N$, то цей рядок міститиме k ненульових елементів. Так, для $N = 8$ 2-й, 4-й, 6-й і 8-й рядки матриці містять два, 3-й і 7-й рядки – чотири, а 1-й і 5-й – вісім елементів.

Розташування елементів у рядку також відбувається за певним законом. Група з k елементів, що міститься у даному рядку зсувається на k

позицій відносно першого елементу попередньої групи з такою ж кількістю елементів. Наприклад для $k=2$ у другому рядку елементи займають 1-шу та 2-гу позиції, у четвертому рядку – 3-тю та 4-ту, у шостому рядку – 5-ту та 6-ту, а у восьмому – 7-му та 8-му позиції.

2. Згенерувати матрицю Хаара N -го порядку, знаки елементів якої будуть відповідати знакам множників (+1 або -1) перед вмістом відповідних клітин матриці нормального перетворення.
3. Помножити отриману матрицю з елементів 0, +1 та -1 на дискретні відліки сигналу $\overline{X_0}$, при чому в усіх непарних рядках (відлік рядків та стовпців починається з одиниці) порядок розташування елементів x_i вектору $\overline{X_0}$ залишити незмінним;
а в парних рядках в кожній парі дискретних відліків їх позиції поміняти місцями, тобто $(x_2, x_1, x_4, x_3, \dots, x_N, x_{N-1})$. Внаслідок цих операцій одержимо матрицю $\overline{W_x}$.
4. Обчислити коефіцієнти ідентичні коефіцієнтам, що приведені у п.4 алгоритму створення матричного оператора нормального перетворення другого виду.
5. Матрицю $\overline{W_x}$, одержану в п.2 алгоритму, помножити на коефіцієнти $\alpha_i^{(k)}$ за наступним правилом:
 - а) всі елементи 1-го рядку матриці $\overline{W_x}$ множаться на коефіцієнт $1/\alpha_1^{(n-1)}$;
 - б) елементи всіх рядків з кількістю елементів $k=2$ множаться на коефіцієнт $1/\alpha_1^{(1)}$ для 2-го рядку, на $1/\alpha_2^{(1)}$ для 4-го рядку, на $1/\alpha_3^{(1)}$ для 6-го рядку і т.д.;
 - в) рядки, що містять $k=4$ елементи множаться на коефіцієнти відповідно $1/\alpha_1^{(2)}$ для 3-го рядку, на $1/\alpha_2^{(2)}$ для 7-го рядку, на $1/\alpha_3^{(2)}$ для 11-го рядку і т.д.;

При чому перші два елементи з групи у 3-му рядку потрібно домножити на коефіцієнт $\frac{\alpha_2^{(1)}}{\alpha_1^{(1)}}$, а інші два – на коефіцієнт $\frac{\alpha_1^{(1)}}{\alpha_2^{(1)}}$; перші два елементи у 7-му рядку – на $\frac{\alpha_4^{(1)}}{\alpha_3^{(1)}}$, а інші два – на $\frac{\alpha_3^{(1)}}{\alpha_4^{(1)}}$ і т.д.;

- г) для рядків, що містять $k=8$ елементів характерним є множник $1/\alpha_1^{(3)}$ для 5-го рядку, на $1/\alpha_2^{(3)}$ для 9-го рядку, на $1/\alpha_3^{(3)}$ для 13-го і т.д.

До того ж перші чотири елементи з 5-го рядка потрібно домножити на коефіцієнт $\frac{\alpha_2^{(2)}}{\alpha_1^{(2)}}$, а інші чотири – на коефіцієнт $\frac{\alpha_1^{(2)}}{\alpha_2^{(2)}}$, перші чотири

елементи з 7-го рядку - на $\frac{\alpha_4^{(2)}}{\alpha_3^{(2)}}$, а інші чотири - на $\frac{\alpha_3^{(2)}}{\alpha_4^{(2)}}$ і т.д.; ...

нарешті, рядки, що містять $k=N$ елементів множаться на коефіцієнт $1/\alpha_1^{(n-1)}$. Додатково перша їх половина містить у своєму складі

множник $\frac{\alpha_2^{(n-2)}}{\alpha_1^{(n-2)}}$, а друга – множник $\frac{\alpha_1^{(n-2)}}{\alpha_2^{(n-2)}}$.

Завдання на виконання розрахунково-графічної роботи

1. За наданою навчальною множиною сигналів (завдання отримати у викладача) необхідно визначити математичне очікування для даного класу та прийняти його в якості тестового сигналу.
Побудувати на одному графіку сигнали, що входять до даного класу та їх математичне очікування.
2. Для нормалізації сигналу за рівнем обрати ортогональне перетворення (перетворення Адамара) та одну з функцій даного перетворення.
Розмірність (кількість відліків) тестового сигналу та перетворення має бути однакова.

2.1 Визначити корегуючі коефіцієнти

$$k_n = \psi(n)/x_{test}(n)$$

2.2 Тестовий сигнал прийняти з урахуванням корегуючих коефіцієнтів $x_{test}(n) = k_n \cdot x_{test}(n)$.

Обчислити та побудувати спектр тестового сигналу та обчислити коефіцієнт трансформант.

$$S_{\xi_n} = \overline{Had_n} \cdot x_{test}(n)$$

$$k_{тр} = \sqrt{\sum_{i \neq n}^{N-1} A_i^2 / A_n}$$

2.3 Для кожного сигналу, що входить до навчальної множини, виконати п.2.2.

2.4 Задати досліджувані сигнали (завдання отримати у викладача).

Побудувати на одному графіку математичне очікування для навчальної множини сигналів та досліджувані сигнали.

2.5 Досліджувані сигнали прийняти з урахуванням корегуючих коефіцієнтів.

2.6 Для досліджуваних сигналів виконати п.4.

2.7 Побудувати спектр тестового сигналу, спектри сигналів, що входять до навчальної множини та спектри досліджуваних сигналів.

3. Для нормалізації сигналу за кроком (за допомогою косинусного перетворення) провести перемасштабування сигналу (зведення до діапазону амплітуд від -1 до 1).

3.1 Провести нормалізацію сигналу за кроком, визначити коефіцієнти трансформант для всіх сигналів, що входять до даного класу та для досліджуваних сигналів. Побудувати спектри.

4. Для тестового сигналу скласти оператор матричного нормального перетворення.

4.1 Побудувати спектри для всіх сигналів, що входять до даного класу та для досліджуваних сигналів за нормальним перетворенням. Визначити коефіцієнти трансформант.

5. Обрати найбільше значення коефіцієнта трансформант серед коефіцієнтів трансформант для сигналів, що належать до даного класу $k_{тр.мах}$ як границю класу.

6. При класифікації (за кожним видом класифікації) коефіцієнт трансформант невідомого досліджуваного сигналу $k_{тр.досл}$ слід порівняти з граничним значенням коефіцієнту класу А. Якщо $k_{тр.досл} \leq k_{тр.мах}$, то віднести цей сигнал до класу А. У випадку, якщо $k_{тр.досл} > k_{тр.мах}$ – цей сигнал не належить до даного класу. Зробити висновки.