Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Проектування лінійних цифрових фільтрів

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання розрахункової роботи
по курсу: „Цифрове оброблення сигналів”
для студентів радіотехнічного факультету

Рекомендовано вченою радою радіотехнічного факультету

Київ
НТУУ «КПІ»
2012

Перелік основних скорочень та позначень.

ЛДС – лінійна дискретна система

АЧХ – амплітудно-частотна характеристика

ФЧХ – фазочастотна характеристика.

КЧХ (або ЧХ) – комплексна частотна характеристика.

ЦФ – цифровий фільтр

ПФ – передавальна функція

РР – розрахункова робота

ІХ – імпульсна характеристика

ПХ – перехідна характеристика

СІХ – скінченна імпульсна характеристика

НІХ – нескінченна імпульсна характеристика

$x(n)$ (або $x(nT)$) - вхідний дискретний сигнал ЦФ

$y(n)$ (або $y(nT)$) – вихідний дискретний сигнал ЦФ

T - період дискретизації

ω_s (f_s) - частота дискретизації

c_i - нуль ПФ

p_k - полюс ПФ

Тема РР: Проектування лінійних цифрових фільтрів.

Мета РР: Вивчити синтез ЦФ методом білінійного перетворення; визначити та дослідити основні характеристики ЦФ в часовій області.

Завдання.

Розрахувати лінійний цифровий фільтр Баттерворта із нескінченною імпульсною характеристикою (ФНЧ або ФВЧ – в залежності від варіанта) методом білінійного перетворення.

Дані для розрахунку наведені в таблиці 1.

Номер варіанту завдання відповідає номеру студента в списку групи.

Таблиця 1 Дані для розрахунку ЦФ

Фільтр нижніх частот						**Фільтр верхніх частот**					
№ вар.	f_S, **Гц**	f_1, **Гц**	δ_1, **дБ**	f_2, **Гц**	δ_2, **дБ**	**№ вар.**	f_S, **Гц**	f_1, **Гц**	δ_1, **дБ**	f_2, **Гц**	δ_2, **дБ**
1	1000	50	3	120	20	**2**	1000	120	3	50	20
3	1000	60	3	120	20	**4**	1000	110	3	60	20
5	1000	70	3	160	20	**6**	1000	160	3	70	20
7	1000	80	3	160	20	**8**	1000	150	3	80	20
9	1000	90	3	200	20	**10**	1000	200	3	90	20
11	1000	100	3	180	20	**12**	1000	180	3	100	20
13	1000	110	3	240	20	**14**	1000	240	3	110	20
15	1000	120	3	220	20	**16**	1000	220	3	120	20
17	1000	130	3	280	20	**18**	1000	280	3	130	20
19	1000	140	3	240	20	**20**	1000	230	3	140	20
21	2000	50	3	120	20	**22**	2000	120	3	50	20
Основні позначення: f_1 - частота зрізу в смузі пропускання ЦФ, затухання на якій дорівнює δ_1; f_2 - гранична частота смуги непропускання ЦФ, затухання на якій дорівнює δ_2.											

В результаті виконання РР студент повинен:

1) Отримати аналітичний вираз ПФ загального виду синтезованого ЦФ (виписати окремо значення коефіцієнтів фільтра a_k та b_i);
2) Отримати аналітичний вираз різницевого рівняння;
3) Отримати аналітичний вираз імпульсної характеристики.
4) Побудувати пряму, канонічну пряму та каскадну структури фільтра.

Робота виконується **від руки** на аркушах формату А4.

Методичні вказівки по виконанню РР.

Нижче приведені короткі вказівки по розрахунку лінійного ЦФ із нескінченною імпульсною характеристикою (рекурсивного фільтра), що базується на використанні методу білінійного перетворення. Додаткову та більш детальну інформацію по синтезу ЦФ цим методом можна отримати, наприклад, із підручників [1, 2, 3]. Приклади синтезу показані в [4].

Метод білінійного перетворення базується на переході від аналогового фільтра-прототипу з ПФ $K(p)$ до ЦФ з ПФ $H(z)$. Як вже було сказано вище, цей метод можна використовувати для синтезу ЦФ із нескінченною імпульсною характеристикою, оскільки аналоговий фільтр-прототип має саме нескінченну імпульсну характеристику.

При білінійному перетворенні в АЧХ аналогового фільтра-прототипу $|K(\omega_a)|$ підставляється функція $\omega_a = f(\omega)$ поточної частоти ω ЦФ. При цьому функцію $f(\omega)$ вибирають таким чином, щоб вона була періодичною з періодом, рівним частоті дискретизації ω_s, а частоти $-\infty \le \omega_a \le \infty$ аналогового фільтра перетворювались в основну смугу частот ЦФ $-\omega_s/2 \le \omega \le \omega_s/2$. Перша вимога забезпечує періодичність АЧХ ЦФ (це властивість АЧХ лінійного ЦФ), а друга – відсутність явища перекриття АЧХ [1, 2, 3].

Функція $f(\omega)$, що задовольняє цим вимогам

$$\omega_a = \frac{2}{T} tg \frac{\omega T}{2}.$$

Із цієї формули видно, що частота $\omega_a = 0$ аналогового фільтра трансформується в $\omega = 0$ для ЦФ, $\omega_a = +\infty \Rightarrow \omega = \omega_s/2$, $\omega_a = -\infty \Rightarrow \omega = -\omega_s/2$.

Таким чином, інтервал частот аналогового фільтру $0 \le \omega_a \le \infty$ відображається в інтервалі частот ЦФ $0 \le \omega \le \omega_s/2$, а інтервал $-\infty \le \omega_a \le 0$ в інтервал $-\omega_s/2 \le \omega \le 0$.

При такому перетворенні АЧХ аналогового прототипу та ЦФ не будуть абсолютно ідентичними, оскільки перетворення нелінійне. Але характер їх АЧХ буде однаковим. Наприклад, якщо АЧХ аналогового фільтру має K підйомів та спадів для $0 \le \omega_a \le \infty$, то і АЧХ відповідного ЦФ буде мати K підйомів та спадів на інтервалі $0 \le \omega \le \omega_s/2$.

Використання методу білінійного перетворення не приводить до ефекту перекриття ЧХ. Відсутність цього явища – позитивна якість даного методу, вона обумовлена тим, що $\omega_a = +\infty \Rightarrow \omega = \omega_s/2$.

На рис. 1 показано трансформацію АЧХ аналогового фільтра в АЧХ ЦФ:

$$\left|H\left(e^{j0T}\right)\right| = \left|K(0)\right| = 1, \quad \left|H\left(e^{j\omega_s T/2}\right)\right| = \left|K(\infty)\right| = 0, \quad \left|H\left(e^{-j\omega_s T/2}\right)\right| = \left|K(-\infty)\right| = 0.$$

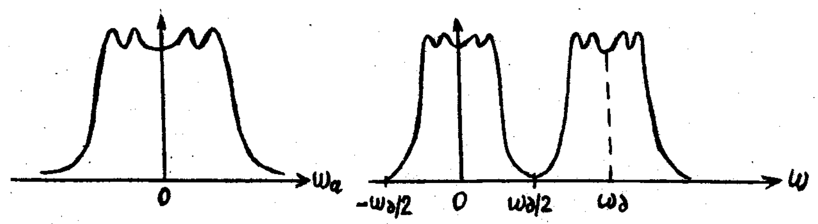

Рис. 1 Трансформація АЧХ аналогового фільтра в АЧХ ЦФ методом білінійного перетворення.

Знаючи АЧХ ЦФ, завжди можливо знайти його ПФ $H(z)$, але така задача буває досить трудомісткою. Тому доцільно знайти таку функцію $p = F(z)$, яка при підстановці в ПФ $K(p)$ аналогового прототипу відразу б давала ПФ ЦФ $H(z)$. Причому, оскільки частоти ω_a та ω функціонально зв'язані з p та z, певній функції $f(\omega)$ відповідає одна функція $F(z)$.

Вказаним вимогам задовольняє наступна функція:

$$p = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}.$$

Таким чином, перехід від ПФ $K(p)$ аналогового фільтру до ПФ $H(z)$ ЦФ будемо здійснювати підстановкою

$$H(z) = K(p)\Big|_{p=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}.$$

Провівши перетворення отримаємо вираз для ПФ ЦФ.

Необхідно пам'ятати, що отримана при цьому ПФ $H(z)$ задовольняє вимогам стійкості, якщо початковий аналоговий фільтр-прототип стійкий.

Таким чином, **послідовність розв'язку** розрахункової роботи буде наступною:

1. Вибір аналогового прототипу (в залежності від варіанту, див. таблицю 1.1).
2. Визначення порядку ненормованого аналогового фільтру (зверніть увагу, що в таблиці 1.1 наведені характеристики саме ЦФ, а не аналогового прототипу).
3. Визначення ПФ аналогового фільтра (див. Додаток 2).
4. Визначення ПФ ЦФ.
5. Визначення дійсних коефіцієнтів ЦФ a_k та b_i .
6. Запис різницевого рівняння ЦФ.
7. Знаходження імпульсної характеристики $h(nT)$.
8. Побудова структурних схем.

Довідкову інформацію стосовно основних властивостей лінійних дискретних систем та синтезу аналогових фільтрів із характеристикою Баттерворта можна знайти в Додатках 1 та 2.

Контрольні питання.

1 Сформулювати визначення перехідної, імпульсної характеристики та передавальної функції лінійної дискретної системи.
2 Записати в загальному вигляді лінійне різницеве рівняння n-го порядку.
3 Перерахувати базові операції, що використовуються при реалізації лінійних цифрових фільтрів.
4 Як можливо експериментально визначити імпульсну та перехідну характеристики фільтру?
5 Умови стійкості лінійної дискретної системи.
6 Зобразити приклади нуль-полюсних карт для стійких та нестійких цифрових фільтрів першого та другого порядків.
7 Зобразити приклади імпульсних характеристик стійких та нестійких цифрових фільтрів першого та другого порядків.

Рекомендована література.

[1] А. Оппенгейм, Р. Шафер. Цифровая обработка сигналов / Издательство „Техносфера”, Москва, 2006. – 856 с.

[2] Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций / Авторы: А.И. Солонина, Д.А. Улахович, С.М. Арбузов, Е.Б. Соловьева / Изд. 2-е испр. и перераб. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 758 с.: ил.

[3] Цифровая обработка сигналов / А.Б. Сергиенко – СПб.: Питер, 2003. – 604 с.

[4] Методические указания к самостоятельному изучению современных основ синтеза цифровых фильтров для студентов специальности «Радиотехника» / сост. К.Б. Круковский-Синевич, О.П. Лысенко. – К.: КПИ, 1988. – 47 с.

[5] Дьяконов В.П. MATLAB 6.5 SP1/7 + Simulink 5/6. Обработка сигналов и проектирование фильтров. – М.: СОЛОН-Пресс, 2005. – 576 с.

[6] Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н. MATLAB 7. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.

[7] Начало работы с MATLAB. (доступна на лабораторній роботі)

[8] Довідкова система MATLAB Help.

Додаток 1.

Основні властивості лінійних дискретних систем.

1. Дискретна лінійна згортка дії $x(nT)$ та імпульсної характеристики $h(nT)$ фільтра:

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} h\left[(n-m)T\right] x(mT),$$

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} h(mT) x\left[(n-m)T\right].$$

2. Різницеве рівняння лінійної дискретної системи:

$$y(nT) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x[(n-i)T] - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y[(n-k)T],$$

або в нормованих одиницях часу:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k).$$

3. ПФ ЦФ загального виду:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

ПФ ЦФ першого порядку:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}.$$

ПФ ЦФ другого порядку:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

4. Для знаходження полюсів p_k знаменник ПФ необхідно прирівняти нулю. Відповідно, щоб знайти нулі ПФ c_i прирівняти нулю необхідно чисельник ПФ.

5. Імпульсною характеристикою лінійної дискретної системи $h(nT)$ називають її реакцію на цифровий одиничний імпульс $\delta(nT)$ при *нульових початкових умовах*. Перехідною характеристикою $g(nT)$ називають реакцію системи на цифровий одиничний скачок $u_1(nT)$ при *нульових початкових умовах*.

6. Імпульсну або перехідну характеристики ЦФ можна також знайти за допомогою різницевого рівняння, при цьому на вхід системи необхідно подати відповідний сигнал (скачок або одиничний імпульс).

7. Аналітичні вирази імпульсних характеристик лінійних дискретних систем знаходяться за допомогою зворотного $z-$перетворення ПФ.

Для ланок першого порядку ($|a|<1$):

$$H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}h(n)=a^{n}\,u(n).$$

Вираз для імпульсної характеристики синтезованого ЦФ рекомендується знаходити методом розкладання ПФ на прості дроби. Якщо порядок чисельника ПФ менше порядку знаменника $N-1<M-1$, то її можна подати у вигляді суми простих дробів

$$H(z)=\sum_{k=1}^{M-1}\left(\frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}\right),$$

p_k – простий k–й полюс ПФ;

A_k – коефіцієнт розкладання при k–му полюсі $A_k=\left(1-p_k z^{-1}\right)H(z)\Big|_{z=p_k}$.

У цьому випадку імпульсна характеристика, як результат зворотного z-перетворення ПФ, буде мати вигляд

$$h(n)=\sum_{k=1}^{M-1}A_k\,p_k^{n}.$$

Якщо порядки чисельника та знаменника ПФ рівні $N-1=M-1$, то матимемо наступні вирази для ПФ та ІХ:

$$H(z)=A_0+\sum_{k=1}^{M-1}\left(\frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}\right),\text{ де } A_0=\frac{b_{N-1}}{a_{M-1}}$$

$$h(n)=A_0\,\delta(n)+\sum_{k=1}^{M-1}A_k\,p_k^{n}.$$

Додаток 2

Аналогові фільтри з характеристикою Баттерворта.

1. АЧХ нормованого ФНЧ з характеристикою Баттерворта

$$\left|K_N\left(\omega\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_N^{2n}}}.$$

2. АЧХ ненормованого ФНЧ з характеристикою Баттерворта: $\omega_N = \omega/\omega_{ac}$,

ω_{ac} - частота зрізу аналогового ФНЧ,

$$\left|K\left(\omega\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\omega/\omega_{ac}\right)^{2n}}}.$$

3. Перехід від ФНЧ до ФВЧ:

$$\left|K\left(\omega\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\omega_{ac}/\omega\right)^{2n}}}.$$

4. Визначення порядку фільтра n:

$$\begin{cases}\left|K\left(\omega_{a1}\right)\right| = \delta_1\\ \left|K\left(\omega_{a2}\right)\right| = \delta_2\end{cases}.$$

5. ПФ нормованого ФНЧ з характеристикою Баттерворта порядку n:

$$K\left(s\right) = \frac{1}{B_n\left(p\right)}.$$

n	$B_n\left(p\right)$
1	$p + 1$
2	$p^2 + 1.41421p + 1$
3	$(p + 1)\ (p^2 + p + 1)$
4	$(p^2 + 0.76537p + 1)\ (p^2 + 1.84776p + 1)$
5	$(p + 1)\ (p^2 + 0.61803p + 1)\ (p^2 + 1.61803p + 1)$
6	$(p^2 + 0.51764p + 1)\ (p^2 + 1.41421p + 1)\ (p^2 + 1.93185p + 1)$
7	$(p + 1)\ (p^2 + 0.44504p + 1)\ (p^2 + 1.24798p + 1)\ (p^2 + 1.80194p + 1)$
8	$(p^2 + 0.39018p + 1)\ (p^2 + 1.11114p + 1)\ (p^2 + 1.66294p + 1)\ (p^2 + 1.96157p + 1)$
9	$(p + 1)\ (p^2 + 0.34730p + 1)\ (p^2 + p + 1)\ (p^2 + 1.53209p + 1)\ (p^2 + 1.87939p + 1)$
10	$(p^2 + 0.31287p + 1)\ (p^2 + 0.90798p + 1)\ (p^2 + 1.41421p + 1)\ (p^2 + 1.78201p + 1)\ (p_2 + 1.97538p +$ $+1)$