Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Цифрове оброблення сигналів

Методичні вказівки
до лабораторних робіт
з дисципліни «Цифрове оброблення сигналів»
для студентів радіотехнічного факультету

Рекомендовано вченою радою радіотехнічного факультету

Київ
НТУУ «КПІ»
2012

Цифрове оброблення сигналів [Текст] : метод. вказівки до лаборатор. робіт з дисципліни «Цифрове оброблення сигналів» для студ. радіотехнічного ф-ту / Уклад.: Р.А. Антипенко, Н.О. Іванюк - К.: НТУУ "КПІ", 2012. – 39 с.

Гриф надано вченою радою радіотехнічного факультету НТУУ "КПІ"
(Протокол № ____ від _________________)

Рекомендовано навчально-методичною комісією радіотехнічного факультету
(Протокол № ____ від _________________)

Н а в ч а л ь н е   в и д а н н я

Цифрове оброблення сигналів

Методичні вказівки
до лабораторних робіт
з дисципліни «Цифрове оброблення сигналів»
для студентів радіотехнічного факультету

Укладачі *Антипенко Руслан Володимирович, к.т.н.,доц.*
Іванюк Наталія Олександрівна, асистент

Відповідальний редактор *Рибін Олександр Іванович, д.т. н, проф.*

Рецензент *Сєдов Сергій Олексійович, к.т.н. доц.*

За редакцією укладачів

НТУУ «КПІ»
Радіотехнічний факультет
03056, Київ, вул..Політехнічна, 12, корп. 17
Тел./факс (044) 454-92-93

Основні скорочення та позначення.

ЛДС – лінійна інваріантна дискретна система

АЧХ – амплітудно-частотна характеристика

ФЧХ – фазочастотна характеристика.

КЧХ (або ЧХ) – комплексна частотна характеристика.

ЦФ – цифровий фільтр

ПФ – передавальна функція

ІХ – імпульсна характеристика

ПХ – перехідна характеристика

СІХ – скінченна імпульсна характеристика

НІХ – нескінченна імпульсна характеристика

$x(n)$ (або $x(nT)$) - вхідний дискретний сигнал ЦФ

$y(n)$ (або $y(nT)$) – вихідний дискретний сигнал ЦФ

T - період дискретизації

$\omega_s\left(f_s\right)$ - частота дискретизації

c_i - нуль ПФ

p_k - полюс ПФ

Вступні зауваження

Цикл лабораторних робіт по курсу «Цифрове оброблення сигналів» складається з шести робіт.

В лабораторних роботах досліджуються тільки лінійні інваріантні (стаціонарні) ЦФ, що можуть бути фізично реалізовані.

Для допуску до лабораторної роботи студенту необхідно перед кожною роботою виконати контрольне завдання. Якщо завдання не виконане (незадовільна оцінка), то студент до лабораторної роботи не допускається.

Оцінювання знать студентів проводиться у відповідності з рейтинговою системою.

Лабораторні роботи виконуються кожним студентом індивідуально.

Всі лабораторні роботи виконуються із використанням програмного пакету MATLAB.

Лабораторна робота №1

Тема роботи: Дослідження лінійних цифрових фільтрів (ЦФ) першого та другого порядку

Мета роботи: 1. Визначити та дослідити основні характеристики ЦФ в часовій, частотній та z - області;
2. Отримати навики роботи з програмним пакетом MATLAB

2. Лабораторне завдання

2.1 Перед початком роботи необхідно створити свою робочу папку. Назва папки повинна містити назву групи та прізвище студента. Всі робочі файли зберігати *тільки* в створеній папці. Після закінчення лабораторних занять папка видаляється.

2.2 Написати програму (програми) для розрахунку характеристик ЦФ

а) Знайти значення нулів та полюсів передавальної функції (ПФ). Побудувати нуль-полюсні характеристики ЦФ. Проаналізувати фільтр на стійкість.

б) Розрахувати та побудувати імпульсну характеристику ЦФ використовуючи зворотне z-перетворення ПФ. Проаналізувати ЦФ на стійкість по отриманій імпульсній характеристиці.

в) Побудувати АЧХ та ФЧХ ЦФ

2.3 Захистити лабораторну роботу

Студент повинен продемонструвати робочі програми по розрахунку характеристик ЦФ, показати розрахунки та пояснити отримані результати.

2.4 Загальні зауваження до лабораторної роботи

Всі характеристики ЦФ необхідно виводити на одне графічне поле (див. методичні вказівки).

Всі програми необхідно оформити у вигляді М-файлів системи MATLAB.

Необхідно написати свої власні програми, а не використовувати функції чи інструменти MATLAB.

Коефіцієнти ЦФ у відповідності із варіантом, наведені в таблиці 1. Номер варіанта відповідає номеру студента у списку групи.

Таблиця 1

№ вар.	Ланка 1-го порядку				Ланка 2-го порядку					
	a_0	a_1	b_0	b_1	a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2
1	1	-0,8	1	-1,25	1	-0,7	0,49	1	0	0
2	1	0,5	1	0	1	-0,8	0,64	1	-1,25	1,5625
3	1	-0,5	1	0	1	-0,7	0,49	1	1	0
4	1	0,8	1	0	1	0	0	0,5	1	0,5
5	1	0,5	1	-0,5	1	0,28	0,64	1	1,2	0,81
6	1	0,5	1	-0,9	1	0	0	0,5	1	-0,5
7	1	-0,5	1	1	1	0,28	0,64	1	1,2	-0,81
8	1	-0,5	1	-1	1	-0,7	0,49	1	-1	1
9	1	0,8	1	0	1	-0,7	0,49	1	1	0
10	1	0,5	1	-0,5	1	0,2	-0,35	1	0	1
11	1	0,5	1	-0,9	1	0,28	0,64	1	1,2	0,81
12	1	-0,5	1	1	1	-0,7	0,49	1	0	1
13	1	-0,8	1	-1,25	1	0	0	0,5	1	0,5
14	1	0,8	1	0	1	0,7	0,49	1	0	0
15	1	0,5	1	-0,5	1	0,9	0,81	1	0	0
16	1	0,5	1	-0,9	1	-0,8	0,64	1	-1,25	1,5625

3. Методичні вказівки по виконанню лабораторного завдання

3.1 Різницеве рівняння ЦФ

$$y(nT)=\sum_{i=0}^{N-1} b_i x[(n-i)T]-\sum_{k=1}^{M-1} a_k y[(n-k)T],$$

або в нормованих одиницях часу

$$y(n)=\sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i)-\sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k).$$

3.2 ПФ ЦФ загального виду

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1+\sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}=\frac{Y(z)}{X(z)}.$$

ПФ ЦФ першого порядку

$$H(z)=\frac{b_0+b_1 z^{-1}}{1+a_1 z^{-1}}.$$

ПФ ЦФ другого порядку

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}.$$

3.3 Для знаходження полюсів p_k знаменник ПФ необхідно прирівняти до нуля. Щоб знайти нулі ПФ c_i прирівняти до нуля необхідно чисельник ПФ.

3.4 Імпульсною характеристикою лінійної дискретної системи $h(nT)$ називають її реакцію на цифровий одиничний імпульс $\delta(nT)$ при *нульових початкових умовах*. (Перехідною характеристикою $g(nT)$ називають реакцію системи на цифровий одиничний скачок $u_1(nT)$ при *нульових початкових умовах*.)

3.5 Імпульсну характеристику ЦФ (при виконанні даної лабораторної роботи) знаходять за допомогою зворотного $z-$перетворення ПФ. Аналітичний вираз для імпульсної характеристики ЦФ рекомендується знаходити методом розкладання ПФ на прості дроби.

Для базових ланок першого порядку необхідно використовувати властивості z-перетворення:

$$H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}h(n)=a^n\,u(n).$$

Якщо порядок чисельника ПФ менше порядку знаменника $N-1<M-1$, то її можна подати у вигляді суми простих дробів

$$H(z)=\sum_{k=1}^{M-1}\left(\frac{A_k}{1-p_kz^{-1}}\right),$$

p_k – простий k–й полюс ПФ;

A_k – коефіцієнт розкладання при k–му полюсі $A_k=\left(1-p_kz^{-1}\right)H(z)\Big|_{z=p_k}$.

У цьому випадку імпульсна характеристика, як результат зворотного z - перетворення ПФ, буде мати вигляд

$$h(n)=\sum_{k=1}^{M-1}A_kp_k^n.$$

Якщо порядки чисельника та знаменника ПФ рівні $N-1=M-1$:

$$H(z)=A_0+\sum_{k=1}^{M-1}\left(\frac{A_k}{1-p_kz^{-1}}\right),\text{ де } A_0=\frac{b_{N-1}}{a_{M-1}}$$

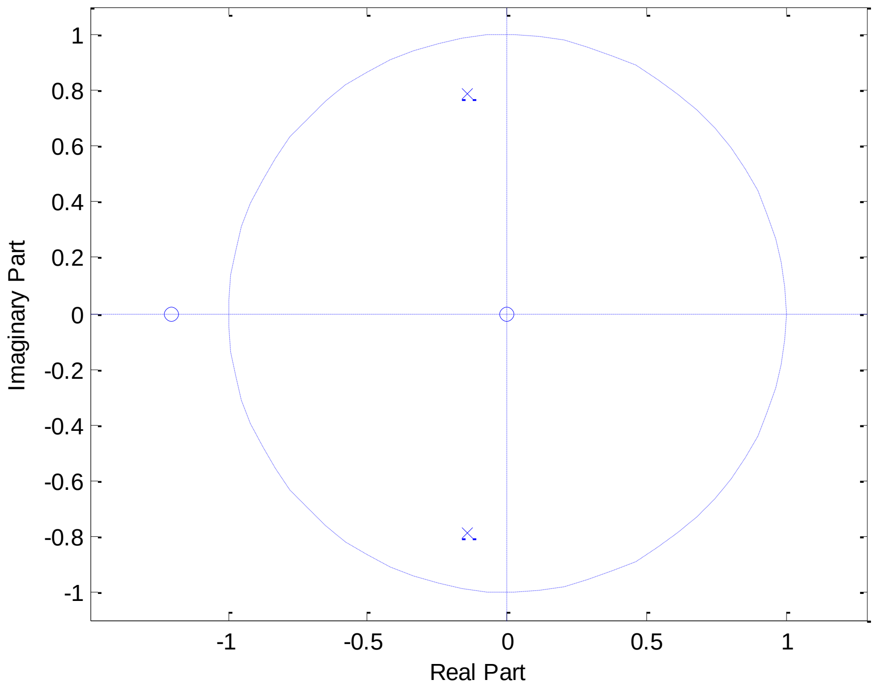
$$h(n)=A_0\,\delta(n)+\sum_{k=1}^{M-1}A_kp_k^n.$$

3.6 Для того, щоб побудувати нуль-полюсну карту ЦФ за допомогою MATLAB дозволяється використати команду zplane(num, den).

Приклад використання команди:

```
num = [1 1.2 0]; % коефіцієнти  чисельника ПФ
den = [1 0.28 0.64]; % коефіцієнти  знаменника ПФ
zplane(num, den)
```

Результат:



3.7 Частотна характеристика ЦФ $H\left(e^{j\hat{\omega}}\right)$ співпадає з його передавальною функцією $H(z)$, якщо область значень змінної z на комплексній $z-$площині обмежена точками на одиничному колі $e^{j\hat{\omega}}$:

$$H\left(e^{j\hat{\omega}}\right) = H\left(z\right)\Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}}.$$

Цей зв'язок дозволяє при відомій ПФ шляхом підстановки $z=e^{j\hat{\omega}}$ отримати аналітичний вираз для КЧХ у вигляді:

$$H\left(e^{j\hat{\omega}}\right)=\frac{\sum\limits_{i=0}^{N-1} b_i e^{-ji\hat{\omega}}}{1+\sum\limits_{k=1}^{M-1} a_k e^{-jk\hat{\omega}}}.$$

3.8 Щоб побудувати графіки характеристик ЦФ достатньо використовувати основні команди графіки MATLAB: stem, plot, subplot, xlabel, ylabel, figure і т.д.

Фрагмент програми:

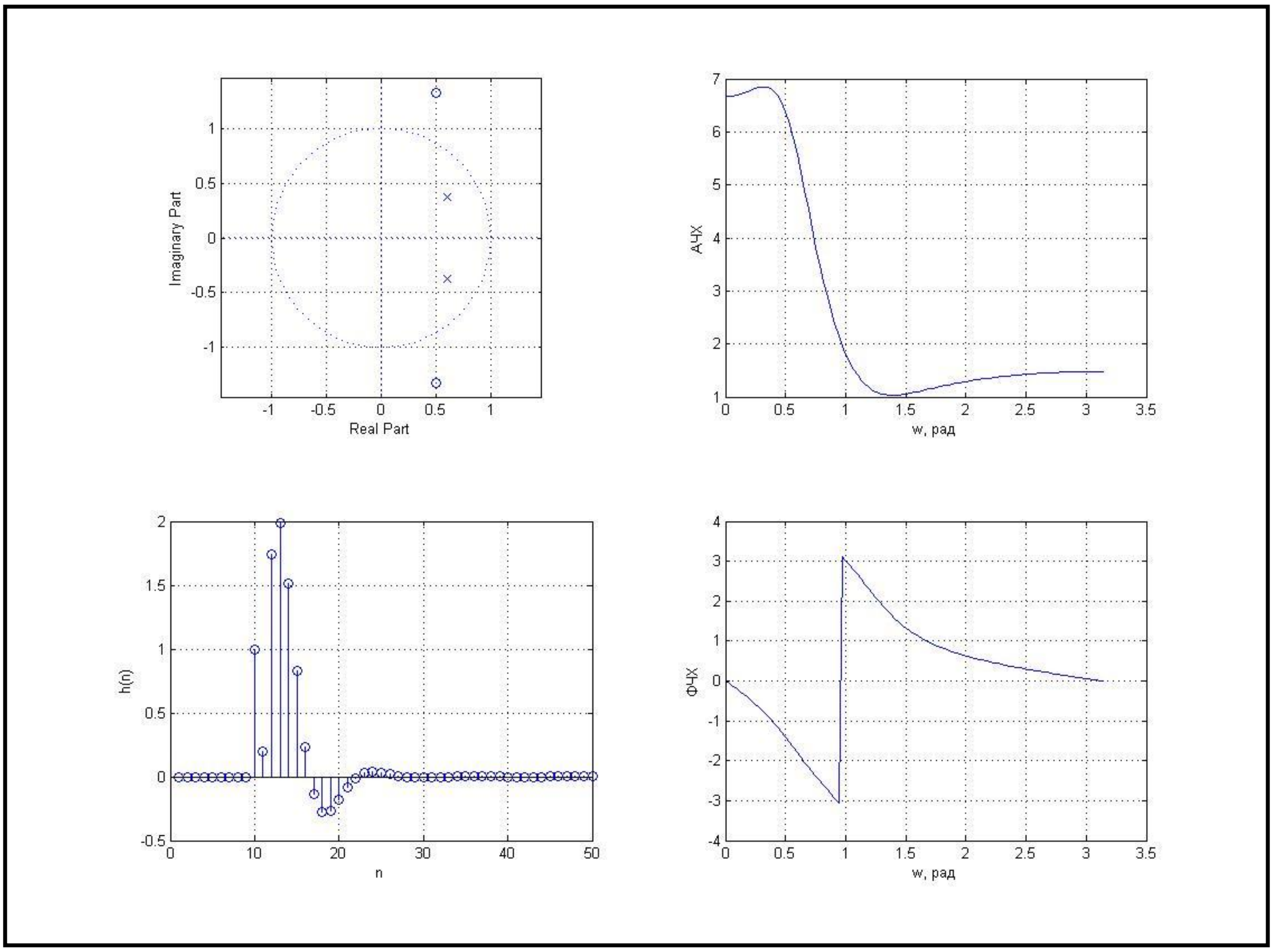
```
………………………………..
% формування графіків
figure (1)
subplot(2,2,1)% нуль-полюсна карта
zplane(num, den)
grid on

subplot(2,2,2)% графік АЧХ
plot(w,h)
grid on;xlabel('w, рад');ylabel('АЧХ')

subplot(2,2,4)% графік ФЧХ
plot(w,f)
grid on;xlabel('w, рад');ylabel('ФЧХ')

subplot(2,2,3)% імпульсна характеристика
stem(n,y(n))
grid on;xlabel('n');ylabel('h(n)')
………………………………………
```

Результат:


Imaginary Part
Real Part
АЧХ
w, рад
h(n)
n
ФЧХ
w, рад

4. Контрольні питання

4.1. Сформулювати визначення перехідної та імпульсної характеристик лінійної дискретної системи.

4.2. Сформулювати визначення передавальної функції лінійної дискретної системи.

4.3. Умови стійкості лінійної дискретної системи.

4.4. Зобразити приклади нуль-полюсних карт для стійких та нестійких цифрових фільтрів першого та другого порядків.

4.5. Зобразити приклади імпульсних характеристик стійких та нестійких цифрових фільтрів першого та другого порядків.

4.6. Сформулювати визначення КЧХ лінійної дискретної системи.

4.7. Перелічити властивості КЧХ лінійної дискретної системи.

Лабораторна робота №2

Тема роботи: Розрахунок НІХ – фільтрів та дослідження їх в часовій області

Мета роботи:
1. Вивчити синтез ЦФ методом білінійного перетворення
2. Визначити та дослідити основні характеристики ЦФ в часовій області
3. Знайти реакцію фільтра на задану вхідну послідовність

1. Домашнє завдання

Для допуску до лабораторної роботи студент повинен виконати розрахункову роботу «Проектування лінійних цифрових фільтрів». В роботі необхідно розрахувати лінійний цифровий фільтр Баттерворта із нескінченною імпульсною характеристикою методом білінійного перетворення.

Номер варіанту та вихідні дані для розрахунку надає викладач.

В результаті виконання роботи студент повинен:

1) отримати аналітичний вираз ПФ загального виду синтезованого ЦФ (виписати окремо значення коефіцієнтів фільтра a_k та b_i);
2) отримати аналітичний вираз різницевого рівняння;
3) отримати аналітичний вираз імпульсної характеристики.

Довідкову інформацію по синтезу цифрових НІХ - фільтрів із характеристикою Баттерворта можна знайти в [1-3, 8].

2. Лабораторне завдання

2.1 Написати програму (програми) для розрахунку характеристик синтезованого ЦФ (всі програми оформити у вигляді М-файлів системи MATLAB).

1) Знайти значення нулів та полюсів ПФ. Побудувати нуль-полюсні характеристики ЦФ. Проаналізувати фільтр на стійкість.
2) Розрахувати імпульсну характеристику ЦФ, використовуючи різницеве рівняння, та побудувати графік. Проаналізувати ЦФ на стійкість по отриманій імпульсній характеристиці.
3) По імпульсній характеристиці оцінити час встановлення перехідного процесу в системі. Для цього визначити та зафіксувати номер відліку імпульсної

характеристики, при якому вона спадає на – 20 дБ від максимального значення (це значення буде необхідне для виконання лабораторної роботи № 4).

4) Розрахувати імпульсну характеристику ЦФ використовуючи аналітичний вираз, отриманий в результаті зворотного z - перетворення ПФ.

5) Розрахувати перехідну характеристику ЦФ, використовуючи різницеве рівняння, побудувати графік ІХ.

6) Всі характеристики ЦФ необхідно вивести на одне графічне поле.

2.2 Знайти реакцію фільтра на задану вхідну послідовність, використовуючи операцію лінійної дискретної згортки.

1) Сформувати вхідну дискретну послідовність

$$x(nT) = \sin(2\pi f_a nT) + \sin(2\pi f_b nT),$$

де частоти f_a та f_b знаходяться з таблиці 1 у відповідності із номером студента в списку групи, період дискретизації T – у відповідності із завданням до розрахункової роботи.

2) Знайти реакцію фільтра $y(nT)$ на сформовану послідовність $x(nT)$.

3) Вивести на одне графічне поле вхідну та вихідну послідовності.

2.3 Захистити лабораторну роботу

Студент повинен продемонструвати робочі програми та пояснити отримані результати.

Таблиця 1.

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
f_a, **Гц**	20	400	30	395	35	390	40	385	45	380	50
f_b, **Гц**	200	25	205	30	210	35	215	40	220	45	225
№	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**
f_a, **Гц**	375	55	370	60	365	65	360	70	355	15	350
f_b, **Гц**	50	250	55	260	60	300	65	250	70	150	25

3. Методичні вказівки по виконанню лабораторного завдання

3.1 Реакцію ЦФ $y(nT)$ можна розрахувати як дискретну згортку дії $x(nT)$ та імпульсної характеристики $h(nT)$ фільтра

$$y(nT)=\sum_{m=0}^{\infty}h\left[(n-m)T\right]x(mT),$$

$$y(nT)=\sum_{m=0}^{\infty}h(mT)x\left[(n-m)T\right].$$

3.2 Різницеве рівняння ЦФ

$$y(nT)=\sum_{i=0}^{N-1}b_i x[(n-i)T]-\sum_{k=1}^{M-1}a_k y[(n-k)T],$$

або в нормованих одиницях часу

$$y(n)=\sum_{i=0}^{N-1}b_i x(n-i)-\sum_{k=1}^{M-1}a_k y(n-k).$$

3.3 ПФ ЦФ загального виду

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{N-1}b_i z^{-i}}{1+\sum_{k=1}^{M-1}a_k z^{-k}}=\frac{Y(z)}{X(z)}.$$

3.4 Для знаходження полюсів p_k знаменник ПФ необхідно прирівняти нулю. Відповідно, щоб знайти нулі ПФ c_i прирівняти нулю необхідно чисельник ПФ.

3.5 Імпульсною характеристикою лінійної дискретної системи $h(nT)$ називають її реакцію на цифровий одиничний імпульс $\delta(nT)$ при *нульових початкових умовах*.

Перехідною характеристикою $g(nT)$ називають реакцію системи на цифровий одиничний скачок $u(nT)$ при *нульових початкових умовах*.

3.6 Імпульсну або перехідну характеристики ЦФ, при виконанні лабораторної роботи, можна знайти за допомогою різницевого рівняння (експериментально), при цьому на вхід системи необхідно подати відповідний сигнал (сформувати відповідну послідовність $x(n)=\delta(n)$ або $x(n)=u(n)$).

3.7 Аналітичні вирази імпульсних характеристик лінійних дискретних систем знаходяться за допомогою зворотного $z-$перетворення ПФ. Вираз для ПФ та коефіцієнти фільтра студент отримує під час виконання розрахункової роботи.

Для ланок першого порядку необхідно використовувати властивості z - перетворення та вважати відомими зворотні перетворення базових ланок першого порядку:

$$H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}h(n)=a^n\,u(n).$$

Під час виконання лабораторної роботи аналітичний вираз для імпульсної характеристики ЦФ рекомендується знаходити методом розкладання ПФ на прості дроби.

Якщо порядок чисельника ПФ менше порядку знаменника $N-1<M-1$, то її можна подати у вигляді суми простих дробів

$$H(z)=\sum_{k=1}^{M-1}\left(\frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}\right),$$

p_k – простий k–й полюс ПФ;

A_k – коефіцієнт розкладання при k–му полюсі $A_k=\left(1-p_k z^{-1}\right)H(z)\big|_{z=p_k}$.

У цьому випадку імпульсна характеристика, як результат зворотного z - перетворення ПФ, буде мати вигляд

$$h(n)=\sum_{k=1}^{M-1}A_k\,p_k^n.$$

Якщо порядки чисельника та знаменника ПФ рівні $N-1=M-1$:

$$H(z)=A_0+\sum_{k=1}^{M-1}\left(\frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}\right),\ \text{де}\ A_0=\frac{b_{N-1}}{a_{M-1}}$$

$$h(n)=A_0\;\delta(n)+\sum_{k=1}^{M-1}A_k\,p_k^n.$$

4. Контрольні питання

4.1 Пояснити послідовність синтезу ЦФ методом білінійного перетворення.

4.2 Особливості методу синтезу ЦФ методом білінійного перетворення.

4.3 Сформулювати визначення перехідної, імпульсної характеристики та передавальної функції лінійної дискретної системи.

4.4 Записати в загальному вигляді лінійне різницеве рівняння.

4.5 Перерахувати базові операції, що використовуються при реалізації лінійних цифрових фільтрів.

4.6 Як можливо експериментально визначити імпульсну та перехідну характеристики фільтру?

4.7 Умови стійкості лінійної дискретної системи.

4.8 Зобразити приклади нуль-полюсних карт для стійких та нестійких цифрових фільтрів першого та другого порядків.

4.9 Зобразити приклади імпульсних характеристик стійких та нестійких цифрових фільтрів першого та другого порядків.

Лабораторна робота №3

Тема роботи: Дослідження лінійних цифрових фільтрів в частотній області

Мета роботи: 1. Дослідити в частотній області цифровий фільтр (ЦФ), що був спроектований в лабораторній роботі №2;
2. Визначити та розрахувати амплітудну та фазову частотні характеристики ЦФ різними методами

1. Загальні зауваження

Лабораторна робота №3 базується на розрахунках та результатах, що були отримані в розрахунковій роботі та лабораторній роботі №2.

При виконанні роботи студенту необхідно порівняти комплексні частотні характеристики (КЧХ) аналогового фільтра - прототипу та розрахованого ЦФ, а також порівняти АЧХ та ФЧХ ЦФ, що були отримані двома різними способами:

- переходом від відомої передавальної функції ЦФ до його КЧХ;
- розрахунком КЧХ, як відношення реакції ЦФ $y(n)$ та комплексної гармонічної дії $x(n)$.

2. Лабораторне завдання

2.1 Порівняння АЧХ та ФЧХ аналогового фільтру-прототипу та ЦФ

1) Користуючись аналітичним виразом для КЧХ ЦФ, розрахувати *нормовану* АЧХ та ФЧХ ЦФ в смузі частот $\omega = 0 \ldots f_S$ (або $\hat{\omega} = 0 \ldots 2\pi$).

2) Використовуючи результати розрахункової роботи та лабораторної роботи № 2, розрахувати *нормовану* АЧХ та ФЧХ аналогового фільтру-прототипу. Розрахунки провести в смузі $\omega = 0 \ldots f_S$ (або $\hat{\omega} = 0 \ldots 2\pi$).

У разі необхідності поточну частоту аналогового фільтра потрібно нормувати відносно частоти дискретизації f_S ЦФ.

3) Побудувати АЧХ ЦФ та аналогового фільтру-прототипу на одному графіку.

4) Побудувати ФЧХ ЦФ та аналогового фільтру-прототипу на одному графіку.

5) Проаналізувати отримані результати. Всі отримані графіки необхідно розмістити на одному графічному полі.

2.2 Експериментальне визначення АЧХ та ФЧХ ЦФ

1) Написати програму для розрахунку *нормованої* АЧХ та ФЧХ ЦФ, що визначаються як відношення реакції фільтра $y(n)$ до гармонічної дії $x(n)$. Розрахунок виконати в діапазоні частот $\omega = 0 \ldots f_S$ (або $\hat{\omega} = 0 \ldots 2\pi$).

Розрахунок проводити для усталеного режиму ЦФ. Кількість відліків часу, що враховуються в різницевому рівнянні для закінчення перехідних процесів у фільтрі була визначена в лабораторній роботі № 2 (див. п 2.1).

2) Побудувати графіки отриманих АЧХ та ФЧХ ЦФ.

3) Проаналізувати отримані результати, порівняти з результатами отриманими в п 2.1.

3. Методичні вказівки

3.1 КЧХ аналогового фільтра необхідно отримати з виразу для його передавальної функції $K(p)$, яка була розрахована при використанні методу білінійного перетворення для проектування ЦФ (див. розрахункову роботу).

3.2 В частотній області основною характеристикою лінійної дискретної системи є зображення Фур'є імпульсної характеристики:

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) e^{-j\omega nT} .$$

Функція $H\left(e^{j\omega T}\right)$ називається комплексною частотною характеристикою (або просто частотною характеристикою) дискретної системи.

Для нормованих величин можемо записати

$$H\left(e^{j\hat{\omega}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-j\hat{\omega} n} .$$

3.3 Комплексну функцію $H\left(e^{j\hat{\omega}}\right)$ можливо виразити через її модуль та аргумент:

$$H\left(e^{j\hat{\omega}}\right) = \left|H\left(e^{j\hat{\omega}}\right)\right| e^{j\arg\left\{H\left(e^{j\hat{\omega}}\right)\right\}} = A(\hat{\omega}) e^{j\varphi(\hat{\omega})} .$$

Модуль КЧХ називають амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ) :

$$A(\hat{\omega}) = \left| H\left(e^{j\hat{\omega}}\right) \right|,$$

а аргумент – фазочастотною характеристикою (ФЧХ):

$$\varphi(\hat{\omega}) = \arg\left\{ H\left(e^{j\hat{\omega}}\right) \right\}.$$

3.4 Частотна характеристика ЦФ $H\left(e^{j\hat{\omega}}\right)$ співпадає з його передавальною функцією $H(z)$, якщо область значень змінної z на комплексній $z-$площині обмежена точками на одиничному колі $e^{j\hat{\omega}}$:

$$H\left(e^{j\hat{\omega}}\right) = H\left(z\right)\Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}}.$$

Цей зв’язок дозволяє при відомій ПФ шляхом підстановки $z = e^{j\hat{\omega}}$ отримати аналітичний вираз для КЧХ у вигляді:

$$H\left(e^{j\hat{\omega}}\right) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i e^{-ji\hat{\omega}}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k e^{-jk\hat{\omega}}}.$$

3.5 КЧХ фільтра можливо визначити як відношення зображень Фур’є реакції та дії при нульових початкових умовах:

$$H\left(e^{j\hat{\omega}}\right) = \frac{Y\left(e^{j\hat{\omega}}\right)}{X\left(e^{j\hat{\omega}}\right)},$$

де $X\left(e^{j\hat{\omega}}\right) = X\left(e^{j\omega T}\right)$, $Y\left(e^{j\hat{\omega}}\right) = Y\left(e^{j\omega T}\right)$ - зображення Фур’є дії та реакції відповідно.

3.6 Частотну характеристику лінійного ЦФ також можливо знайти як відношення гармонічних сигналів – дії $x\left(n\right)$ та реакції $y\left(n\right)$ в усталеному режимі (експериментальний метод):

$$H\left(e^{j\hat{\omega}}\right) = \frac{y\left(n\right)}{x\left(n\right)}\Bigg|_{x\left(n\right)=C_x e^{j\hat{\omega}n}} = \frac{C_y}{C_x} e^{j\left[\phi_y\left(\hat{\omega}\right) - \phi_x\left(\hat{\omega}\right)\right]}.$$

Реакція ЦФ $y\left(n\right)$ на комплексний гармонічний сигнал $x\left(n\right) = e^{j\,\hat{\omega}\,n}$ знаходиться за допомогою різницевого рівняння

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k).$$

Кількість відліків часу, що враховуються для кожної частотної точки однакова та вибирається із умови закінчення перехідних процесів у ЦФ.

3.7 Комплексний гармонічний вхідний сигнал подається у вигляді:

$$x\left(nT\right) = C_x e^{j\omega nT} = C_x \cos\left(2\pi n f / f_S\right) + jC_x \sin\left(2\pi n f / f_S\right),$$

де f_S – частота дискретизації.

При виконанні роботи рекомендується прийняти амплітуду сигналу $C_x = 1\ B$. Якщо проводити розрахунки використовуючи нормовану частоту $\hat{\omega} = \omega T = 2\pi \frac{f}{f_S}$, то вхідний сигнал можна подати як $x\left(n\right) = e^{j\hat{\omega} n}$.

Перед початком роботи необхідно визначитись – яку, нормовану чи не нормовану, частоту буде використано і всі подальші розрахунки проводити у відповідності із вибраним варіантом.

4. Контрольні питання

4.1 Перерахувати основні особливості АЧХ та ФЧХ лінійної дискретної системи у порівнянні із цими характеристиками аналогової системи.

4.2 Як можливо реалізувати перехід від передавальної функції лінійної дискретної системи до її АЧХ та ФЧХ?

4.3 Як експериментально визначити АЧХ та ФЧХ ЦФ?

4.4 Перелічити властивості лінійних дискретних систем.

Лабораторна робота №4

Тема роботи: Структурні схеми лінійних цифрових фільтрів

Мета роботи: 1. Вивчити структурні схеми ЦФ;

2. Побудувати структурні схеми фільтрів, спроектованих в розрахунковій роботі, визначити їх характеристики

1. Загальні зауваження

Лабораторна робота №4 базується на розрахунках та результатах, що були отримані в розрахунковій роботі та лабораторній роботі №2.

При виконанні роботи студенту необхідно побудувати структурні схеми ЦФ за допомогою розширення MATLAB – Simulink та розрахувати імпульсні характеристики фільтрів.

2. Лабораторне завдання

2.1 Побудувати структурні схеми ЦФ за допомогою розширення MATLAB – Simulink.

1) Побудувати пряму структурну схему ЦФ. Знайти імпульсну характеристику фільтра.

2) Побудувати пряму канонічну структурну схему ЦФ. Знайти імпульсну характеристику фільтра.

3) Побудувати каскадну структурну схему ЦФ. Знайти імпульсну характеристику фільтра.

4) Побудувати паралельну структурну схему ЦФ. Знайти імпульсну характеристику фільтра.

5) Порівняти імпульсні характеристики ЦФ, отримані із різних структурних схем.

2.2 Перевірити отримані результати, розрахувавши імпульсну характеристику фільтра за допомогою інструмента MATLAB - Filter Design and Analysis Tool fdatool.

3. Методичні вказівки

Структурна схема (структура) ЦФ відображає алгоритм розрахунку реакції. Алгоритм розрахунку реакції задається безпосередньо РР, і в цьому сенсі структура ЦФ відображає РР.

Алгоритм розрахунку реакції по РР базується на виконанні трьох типів операцій з відліками сигналу:

- Затримки на період дискретизації T
- Перемноження на константу
- Алгебраїчного складання

На структурній схемі їм у відповідність ставиться три види елементів:

- Елемент затримки
- Помножувач
- Суматор

Структура ЦФ може бути реалізована апаратно та програмно. В першому випадку – у вигляді спеціалізованого цифрового пристрою на інтегральних логічних елементах, у другому – у вигляді програми на комп'ютері або на цифровому сигнальному процесорі. В даний час програмна реалізація переважає.

3.1 Структура рекурсивних ЦФ

Рекурсивним ЦФ відповідають три основних види математичного зображення ПФ $H(z)$:

- Дрібно-раціональне;
- Добуток множників другого порядку;
- Сума дробів другого порядку;

які визначають три основні структури:

- Пряму;
- Каскадну (послідовну);
- Паралельну.

3.1.1 Пряма структура

Пряма структура визначається ПФ $H(z)$, зображеній в дрібно-раціональному вигляді (в загальному вигляді):

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1+\sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}$$

та відображає різницеве рівняння

$$y(n)=\sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i)-\sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k).$$

На рис. 1 приведена пряма структура ланки 2-го порядку,

$$H(z)=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}}{1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}}, \qquad y(n)=b_0 x(n)+b_1 x(n-1)+b_2 x(n-2)-a_1 y(n-1)-a_2 y(n-2)$$

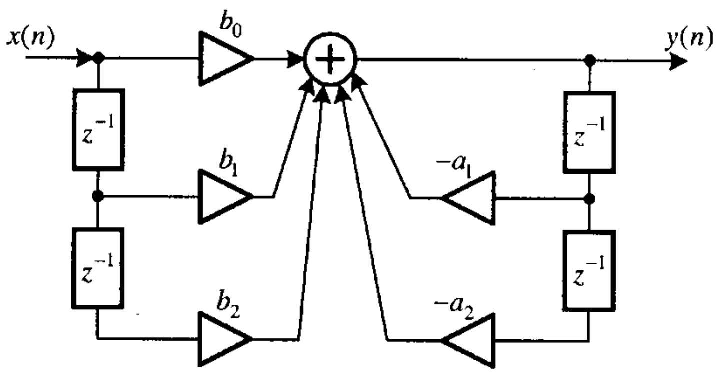


Рисунок 1

Структуру називають канонічною, якщо кількість елементів затримки в ній *мінімальне* та дорівнює порядку ПФ – $\max\{(M-1),(N-1)\}$. Розглянемо приклад такої структури.

3.1.2 Канонічна пряма структура

Пряма канонічна структура визначається еквівалентним поданням ПФ у вигляді добутку двох ПФ (зменшується кількість ліній затримки)

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}=\frac{V(z)}{X(z)}\frac{Y(z)}{V(z)}=H_1(z)H_2(z),$$

одна із яких описує рекурсивну частину ЦФ

$$H_1(z)=\frac{V(z)}{X(z)}=\frac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{M-1}a_k z^{-k}} ,$$

а друга – нерекурсивну

$$H_2(z)=\frac{Y(z)}{V(z)}=\sum_{i=0}^{N-1}b_i z^{-i} .$$

ПФ $H_1(z)$ та $H_2(z)$, відповідно із визначенням, відповідають РР

$$v(n)=x(n)-\sum_{k=1}^{M-1}a_k v(n-k),$$

$$y(n)=\sum_{i=0}^{N-1}b_k v(n-i)$$

що відображується у вигляді прямої структури.

ПФ та РР ланки 2-го порядку мають вигляд

$$H(z)=H_1(z)H_2(z)=\frac{1}{1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}}\left(b_0+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}\right)$$

$$v(n)=x(n)-a_1 v(n-1)-a_2 v(n-2)$$

$$y(n)=b_0 v(n)+b_1 v(n-1)+b_2 v(n-2)$$

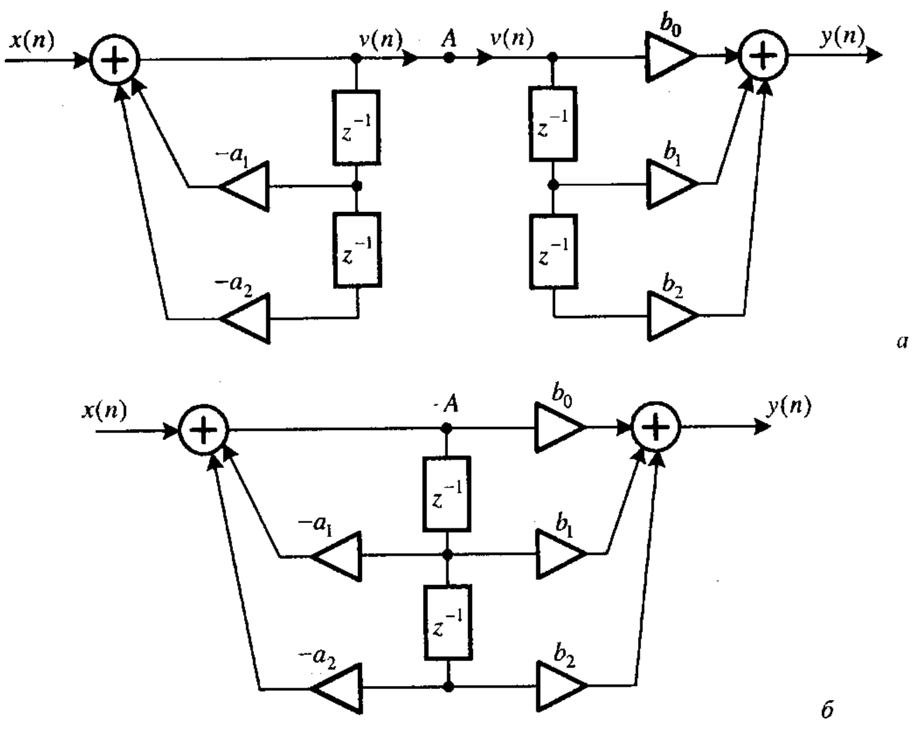


Рисунок 2

3.1.3 Каскадна структура

Як відомо ПФ можна подати у вигляді добутку

$$H(z)=\frac{\sum\limits_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1+\sum\limits_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}}=\left.\frac{b_0\prod\limits_{i=1}^{N-1}\left(1-c_i z^{-1}\right)}{a_0\prod\limits_{k=1}^{M-1}\left(1-p_k z^{-1}\right)}\right|_{a_0=1}=\frac{b_0\prod\limits_{i=1}^{N-1}\left(1-c_i z^{-1}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{M-1}\left(1-p_k z^{-1}\right)}.$$

В загальному випадку як нулі так і полюси є комплексно-спряженими числами. Попарно перемножимо найпростіші множники з комплексно-спряженими нулями в чисельнику, та комплексно-спряженими полюсами в знаменнику. Таким чином ми отримаємо вираз для ПФ $H(z)$, що подана у вигляді добутку множників другого порядку з дійсними коефіцієнтами:

$$H(z)=\prod_{k=1}^{K} H_k(z)=\prod_{k=1}^{K}\left(\frac{b_{0k}+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}}{1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}}\right),$$

де b_{0k}, b_{1k}, b_{2k}, a_{1k}, a_{2k} - дійсні коефіцієнти, а K - кількість ланок 2-го порядку.

Якщо $N-1$ та $M-1$ – непарні, то один із множників буде найпростішим $b_{2k}=0$, $a_{2k}=0$: $\dfrac{b_{0k}+b_{1k}z^{-1}}{1+a_{1k}z^{-1}}$.

При прямій структурі всіх ланок даному виду ПФ відповідає система РР

$$\begin{cases} v_1(n)=b_{01}x(n)+b_{11}x(n-1)+b_{21}x(n-2)-a_{11}v_1(n-1)-a_{21}v_1(n-2) \\ v_2(n)=b_{02}v_1(n)+b_{12}v_1(n-1)+b_{22}v_1(n-2)-a_{12}v_2(n-1)-a_{22}v_2(n-2) \\ \ldots \\ y(n)=b_{0,K-1}v_{K-1}(n)+b_{1,K-1}v_{K-1}(n-1)+b_{2,K-1}v_{K-1}(n-2)-a_{1,K-1}y(n-1)-a_{2,K-1}y(n-2) \end{cases},$$

з якої випливає, що реакція k-ї ланки, $k=1,2,\ldots,(K-1)$, є дією для $(k+1)$-ї ланки, тому дана система зображується каскадним з’єднанням рекурсивних ланок 2-го порядку (*біквадратних блоків*) – ***каскадною структурою***.

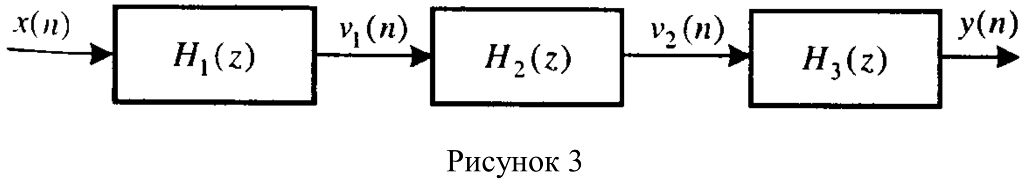


Рисунок 3

3.1.3 Паралельна структура рекурсивного ЦФ

ПФ може бути подана у вигляді суми елементарних дробів.

$H(z) = A_0 + \sum_{k=1}^{M-1} \frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}$, де $A_k = \left(1-p_k z^{-1}\right) H(z)\Big|_{z=p_k}$, $A_0 = \frac{b_{N-1}}{a_{M-1}}$ (якщо $N-1 = M-1$)

Якщо $N-1 < M-1$

$$H(z) = \sum_{k=1}^{M-1} \frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}$$

Попарно складемо дроби з комплексно-спряженими полюсами та отримаємо вираз для ПФ $H(z)$, поданій у вигляді суми дробів другого порядку з дійсними коефіцієнтами:

$$H(z) = \sum_{k=1}^{K} H_k(z) = \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}} \right),$$

де b_{0k}, b_{1k}, a_{1k}, a_{2k} - дійсні коефіцієнти, а K - кількість ланок 2-го порядку.

Якщо $N-1 = M-1$ $\qquad H(z) = A_0 + \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}} \right)$

РР, що відповідає даному виду ПФ

$$y(n) = \sum_{k=1}^{K} v_k(n), \text{ де } v_k(n) = b_{0k} x(n) + b_{1k} x(n-1) - a_{1k} v_k(n-1) - a_{2k} v_k(n-2).$$

Із РР випливає, що дія для всіх ланок однакова, а реакція дорівнює сумі реакцій окремих ланок, тому дане РР відображується паралельним з’єднанням рекурсивних ланок 2-го порядку – *паралельною структурою*.

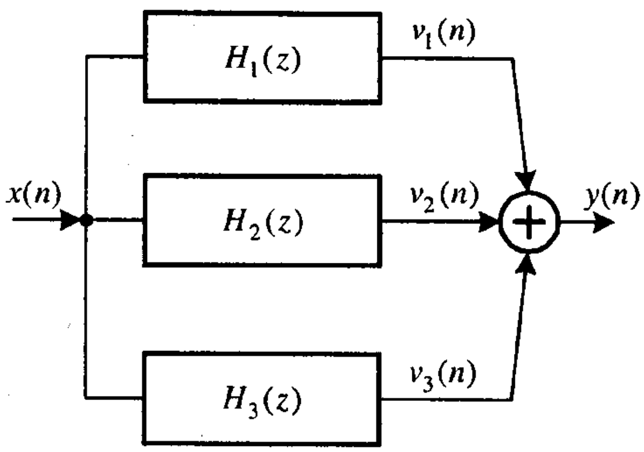


Рисунок 4

3.2 Структури нерекурсивних ЦФ

Нерекурсивним ЦФ відповідають два основних види математичного подання ПФ:

- Раціональний
- Добуток множників другого порядку

які визначають дві основні структури:

- Пряму
- Каскадну

3.2.1 Пряма структура

Пряма структура визначається ПФ $H(z)$, що подана у вигляді раціональної функції

$$H(z)=\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} ,$$

та відображає РР

$$y(n)=\sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i).$$

Таку структуру інколи називають лінією затримки з відводами або структурою трансверсального (поперечного) фільтра

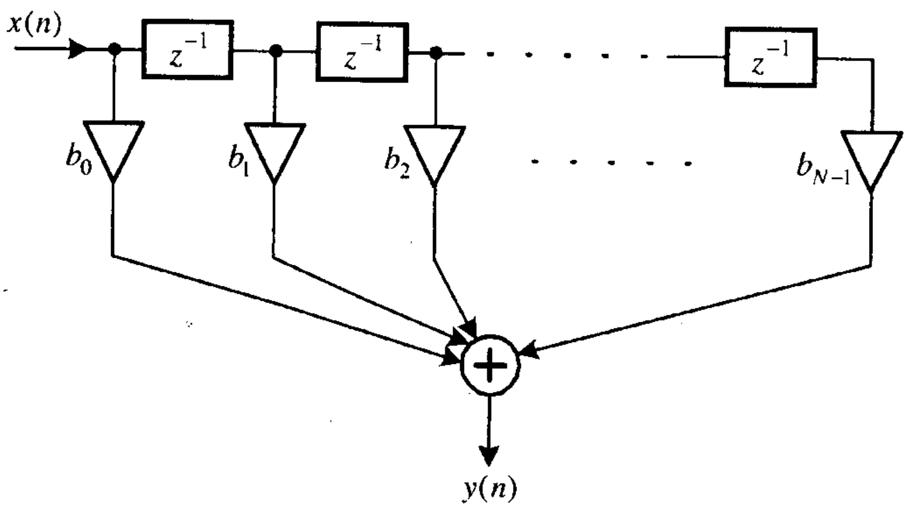


Рисунок 5.

Існує різновид прямої структури – пряма структура (пряма приведена структура) для нерекурсивних ЦФ з лінійною ФЧХ.

Властивість симетричності коефіцієнтів (IX) дозволяють побудувати структурну схему СІХ-фільтра з лінійною ФЧХ, що має практично в 2 рази менше множників, чим структурна схема СІХ-фільтра з іншою будь-якою ФЧХ (рис. 6).

3.2.2 Каскадна структура СІХ-фільтра

Каскадна структура визначається ПФ $H(z)$, що подана у вигляді добутку множників другого порядку:

$$H(z)=\prod_{i=1}^{K} H_i(z)=\prod_{i=1}^{K}\left(b_{0i}+b_{1i}z^{-1}+b_{2i}z^{-2}\right),$$

де b_{0k}, b_{1k}, b_{2k} - дійсні коефіцієнти, а K - кількість ланок 2-го порядку.

ПФ відповідає система РР нерекурсивних ланок 2-го порядку:

$$\begin{cases} v_1(n)=b_{01}x(n)+b_{11}x(n-1)+b_{21}x(n-2) \\ v_2(n)=b_{02}v_1(n)+b_{12}v_1(n-1)+b_{22}v_1(n-2) \\ \dots \\ y(n)=b_{0,K-1}v_{K-1}(n)+b_{1,K-1}v_{K-1}(n-1)+b_{2,K-1}v_{K-1}(n-2) \end{cases},$$

що відображується каскадною структурою, де кожна ланка має пряму структуру (рис.7).

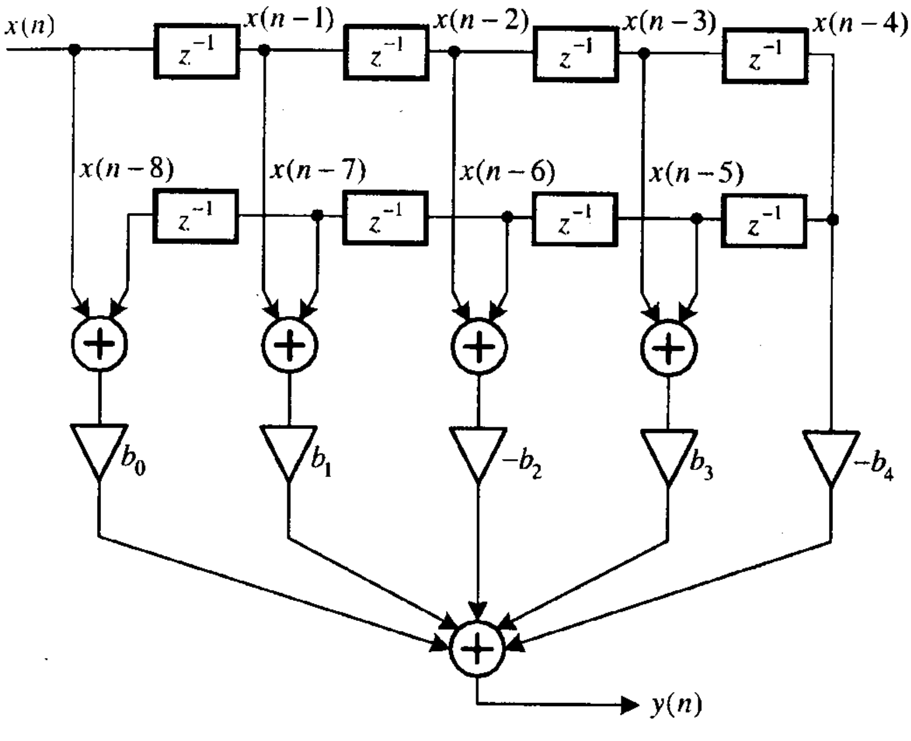


Рисунок 6

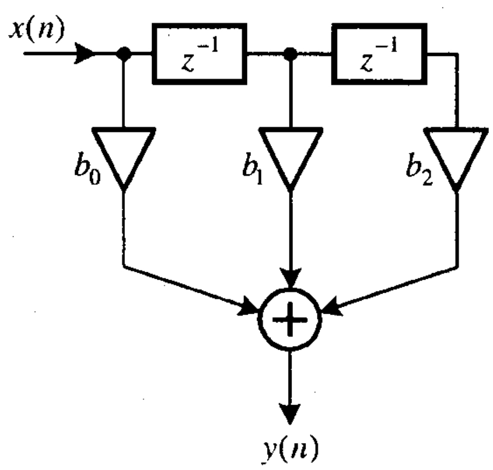


Рисунок 7

3.3 Приклад реалізації ЦФ першого порядку:

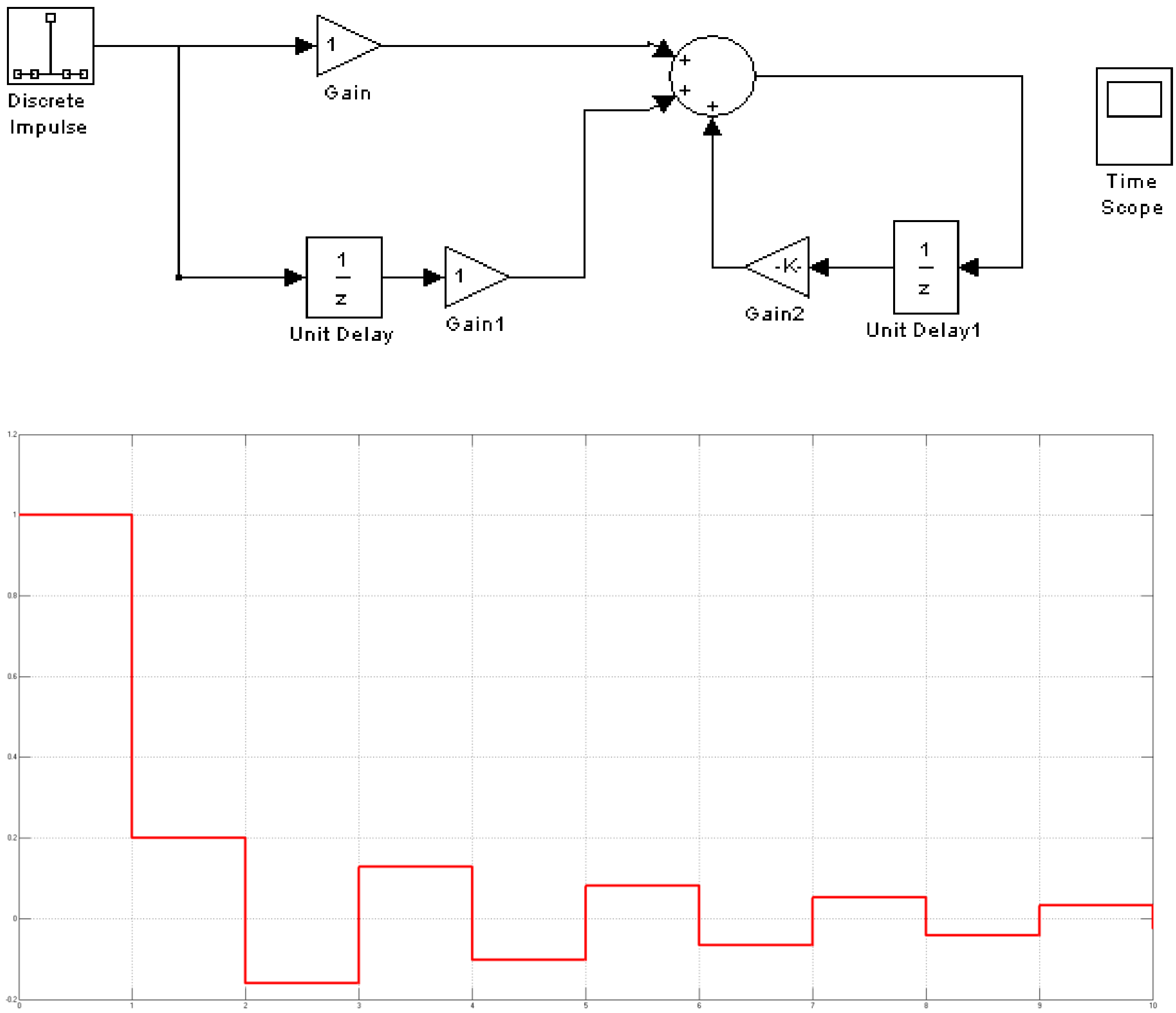


Рисунок 8

3.4 Simulink та Filter Design and Analysis Tool запускаються командами: simulink та fdatool.

4. Контрольні питання

4.1 Сформулювати визначення перехідної, імпульсної характеристики та передавальної функції лінійної дискретної системи.

4.2 Перерахувати базові операції, що використовуються при реалізації лінійних цифрових фільтрів.

4.3 Зобразити структурні схеми рекурсивних ЦФ. Як вони отримані?

4.4 Зобразити структурні схеми не рекурсивних ЦФ. Як вони отримані?

Лабораторна робота №5

Тема роботи: Дискретне перетворення Фур'є

Мета роботи: 1. Розрахувати та порівняти спектри аналогового та дискретного сигналів

2. Дослідити дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) одиночного імпульсу

1. Домашнє завдання

1.1 Для виконання роботи студенту необхідно вибрати неперервний одиночний імпульс у відповідності із своїм варіантом (номер у списку групи):

- прямокутний імпульс

$$s(t)=\begin{cases} A, & 0 \le t \le \tau, \\ 0, & t<0, t>\tau. \end{cases}$$

Варіант	1	5	9	13	17	21
A, В	1,5	2	1,5	1,2	2,5	2
τ, мс	4	3	2	5	6	7
Інтервал аналізу	$2,5\tau$	3τ	$2,5\tau$	3τ	$2,5\tau$	2τ

- імпульс Гауса

$$s(t)=A\,e^{-\frac{\left(t-\frac{T_C}{2}\right)^2}{\left(\frac{\tau}{2}\right)^2}}.$$

Варіант	2	6	10	14	18	22
A, В	0,5	2,5	1,5	2	1,2	2
τ, мс	2	3,5	4	4,5	2,5	5
Інтервал аналізу T_C, мс	10	15	20	25	15	30

- несиметричний трикутний імпульс

$$s(t)=\begin{cases} A\dfrac{t}{\tau}, & 0\le t\le \tau, \\ 0, & t<0, t>\tau. \end{cases}$$

Варіант	3	7	11	15	19	23
A, В	0,5	2	2,5	3	3,5	1,5
τ , мс	2	3	4	5	6	7
Інтервал аналізу, мс	10	15	20	25	15	30

- симетричний трикутний імпульс

$$s(t)=\begin{cases} A\left(1-\dfrac{|t-\tau|}{\tau}\right), & 0\le t\le 2\tau, \\ 0, & t<0, t>2\tau. \end{cases}$$

Варіант	4	8	12	16	20	24
A, В	0,5	2	2,5	3	3,5	1,5
τ , мс	2	3	4	7	6	5
Інтервал аналізу, мс	10	15	20	25	15	30

* Інтервал аналізу задає часовий відрізок від 0 до вказаного в таблиці значення.

1.2 Записати вираз для спектру заданого неперервного сигналу [3, стор. 34].

2. Лабораторне завдання

2.1 Провести дискретизацію неперервного сигналу. Вибрати кількість відліків $N=128$. Розрахувати частоту дискретизації $f_д$.

Вивести графіки неперервного та дискретного сигналів.

2.2 Розрахувати та побудувати амплітудний спектр неперервного сигналу. Результати вивести в діапазоні частот $0\ldots f_д$.

2.3 Розрахувати та побудувати амплітудний спектр дискретного сигналу, використовуючи дискретизоване в часі перетворення Фур'є. Результати вивести в діапазоні частот $0\ldots f_д$.

2.4 Скласти програму, що реалізує алгоритм ДПФ дискретного сигналу. Результати вивести в діапазоні частот $0\ldots f_s$.

2.5 Розрахувати та побудувати амплітудний спектр дискретного сигналу, використовуючи команду MATLAB fft [7].

2.6 Порівняти отримані спектри неперервного та дискретного сигналів.

Необхідно вивести на одне графічне поле всі графіки.

3. Методичні вказівки та короткі теоретичні відомості

3.1 Для успішного виконання лабораторної роботи необхідно ознайомитися з теоретичним матеріалом, що стосується ДПФ [1-3]. Далі наведені тільки основні теоретичні викладки.

3.2 Спектр неперервного сигналу знаходиться за допомогою перетворення Фур'є:

- пряме перетворення

$$X\left(\omega\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t\right) e^{-j\omega t} \, dt,$$

- зворотне перетворення

$$x\left(t\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X\left(\omega\right) e^{j\omega t} \, d\omega.$$

3.3 Дискретизацію сигналу необхідно виконати за допомогою підстановки $t = nT$ ($T = 1/f_д$) у виразі для заданого неперервного сигналу.

У відповідності із теоремою про дискретизацію неперервних сигналів, частота дискретизації вибирається не менше чим в два рази більшою за верхню частоту у спектрі неперервного сигналу $\omega_д \geq 2\omega_B$ ($f_д \geq 2 f_B$).

Оскільки спектр неперервного сигналу нескінченний та нічим при виконанні лабораторної роботи не обмежується (відсутній антиелайсинговий фільтр), то необхідно мати на увазі, що після дискретизації сигналу буде існувати явище накладання спектрів.

3.4 Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) – різновидність перетворення Фур'є, призначене для роботи з дискретними сигналами.

ДПФ може бути використане як для періодичних послідовностей з періодом N, так і для послідовностей скінченної довжини N.

3.5 ДПФ називається пара взаємно однозначних перетворень:

- пряме перетворення

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}\ ,\ k=0,1,\ldots,N-1;$$

- зворотне перетворення

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}\ ,\ n=0,1,\ldots,N-1,$$

де:

$x(n)$ - послідовність в часовій області (дійсна або комплексна);

$X(k)$ - дискретні коефіцієнти Фур'є (дійсні або комплексні);

k - номер відліку послідовності $X(k)$, що відповідає частоті $k\Delta\omega$ ($\Delta\omega$ - період дискретизації по частоті);

W_N^{nk} - повертаючий множник

$$W_N^{nk}=e^{-j\frac{2\pi}{N}nk},$$

що отримав свою назву тому, що аргумент експоненти $e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ відображує кут повороту на одиничному колі комплексної площини.

Послідовності $x(n)$ та $X(k)$, що мають N відліків, називають N –точковими.

Відліки послідовності $X(k)$ називають відліками ДПФ.

3.6 З точністю до постійного коефіцієнту, ДПФ являє собою дискретні відліки спектральної функції дискретного сигналу, що відповідають частотам $\omega_k=\omega_д k/N$ ($f_k=f_д k/N$). Тому значення ДПФ інколи називають *спектральними відліками*.

3.7 Властивості ДПФ є прямим наслідком властивостей спектрів дискретних сигналів: періодичність, лінійність, зміщення N – точкового ДПФ, затримка N – точкової послідовності, теорема Парсеваля, властивість симетрії [1-3].

3.8 ДПФ є лінійним перетворенням, що трансформує вектор часових відліків в вектор *такої ж довжини*, що містить відліки спектральні. Таке перетворення може бути реалізоване як перемноження певної квадратної матриці на вхідний вектор-стовпчик:

$$\mathbf{y}=\mathbf{F}\,\mathbf{x},$$

де $\mathbf{F}$ – матриця перетворення.

Для ДПФ матриця $\mathbf{F}$ має вигляд

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & e^{-j\frac{4\pi}{N}} & e^{-j\frac{6\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ 1 & e^{-j\frac{4\pi}{N}} & e^{-j\frac{8\pi}{N}} & e^{-j\frac{12\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} \\ 1 & e^{-j\frac{6\pi}{N}} & e^{-j\frac{12\pi}{N}} & e^{-j\frac{18\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}3(N-1)} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)^2} \end{bmatrix}.$$

4. Контрольні питання

4.1.Порівняти спектри сигналів: неперервного аперіодичного, неперервного періодичного та дискретного аперіодичного.

4.2.Схематично зобразити спектр дискретного сигналу.

4.3.Перелічити властивості спектрів дискретних сигналів.

4.4.Описати алгоритм ДПФ.

4.5.Перелічити властивості ДПФ.

Лабораторна робота №6

Тема роботи: Цифрова фільтрація дискретних сигналів

Мета роботи: 1. Вивчити алгоритм роботи цифрового фільтра

2. Знайти реакцію фільтра на задану вхідну послідовність

3. Вивчити явище розтікання спектру

1. Загальні зауваження

Для виконання лабораторної роботи №6 необхідно мати коефіцієнти фільтра, спроектованого в розрахунковій роботі та дослідженого в лабораторній роботі №2 та 3.

В результаті виконання даної роботи студент повинен:

4) Сформувати дискретний вхідний сигнал для цифрового фільтра.
5) Знайти реакцію ЦФ на задану вхідну дію використовуючи різницеве рівняння.
6) Порівняти сигнали в часовій області та спектри сигналів до і після фільтрації.

2. Лабораторне завдання

2.1 Формування вхідної дискретної послідовності.

1) Сформувати вхідну послідовність

$$x(nT) = A\sin(2\pi f_a nT) + B\sin(2\pi f_b nT),$$

де частоти f_a , f_b та амплітуди A, B знаходяться з таблиці 1 у відповідності із номером студента в списку групи, період дискретизації T – у відповідності із завданням до розрахункової роботи.

Для виконання лабораторної роботи вибрати довжину вхідної послідовності $N = 64$.

2) Побудувати графік послідовності в часовій області.

3) Побудувати амплітудний спектр вхідної послідовності, використовуючи команду MATLAB fft (реалізує алгоритм швидкого перетворення Фур'є [1-3]).

4) Побудувати амплітудні спектри вхідної послідовності із використанням вагових (віконних) функцій Блекмана, Хеммінга та Хеннінга.

5) Всі графіки, отримані в п. 2.1 необхідно вивести на одне графічне поле.

2.2 Побудувати КЧХ фільтра по коефіцієнтам a_k , b_i (дозволяється використати команду MATLAB freqz).

2.3 Знаходження реакції ЦФ на вхідну послідовність.

1) Знайти реакцію фільтра $y(nT)$ на сформовану вхідну послідовність $x(nT)$, використовуючи різницеве рівняння.

2) Побудувати графік вихідної послідовності $y(nT)$ в часовій області.

3) Побудувати амплітудний спектр вихідної послідовності, використовуючи одну із віконних функцій (на вибір студента).

5) Всі графіки, отримані в п. 2.3 необхідно вивести на одне графічне поле.

Таблиця 1

№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
f_a, **Гц**	20	400	30	395	35	390	40	385	45	380	50
f_b, **Гц**	200	25	205	30	210	35	215	40	220	45	225
A	1	2,5	2	2	2,5	3	1	1	2	1,5	3
B	0,2	0,15	0,25	0,1	0,35	0,2	0,1	0,15	0,15	0,2	0,2
№	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**
f_a, **Гц**	375	55	370	60	365	65	360	70	355	15	350
f_b, **Гц**	50	250	55	260	60	300	65	250	70	150	25
A	3	2	2	2,5	2	3	2,5	1	2,5	1,5	3,5
B	0,2	0,1	0,25	0,15	0,15	0,2	0,25	0,15	0,2	0,2	0,2

3. Методичні вказівки по виконанню лабораторного завдання

3.1 Реакцію ЦФ $y(nT)$ можна розрахувати як дискретну згортку дії $x(nT)$ та імпульсної характеристики $h(nT)$ фільтра

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} h\left[(n-m)T\right] x(mT),$$

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} h(mT) x\left[(n-m)T\right].$$

Якщо послідовності $h(n)$ та $x(n)$ є скінченними та мають довжину відповідно M та N, то реакція системи буде теж скінченною та буде обчислюватись за формулою (в нормованих одиницях)

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N+M-1} h(m) x(n-m).$$

3.2 Реакцію ЦФ на вхідну послідовність також можна знайти використавши різницеве рівняння

$$y(nT) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x[(n-i)T] - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y[(n-k)T],$$

або в нормованих одиницях часу

3.3 ДПФ називається пара взаємно однозначних перетворень:

- пряме перетворення

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \; k = 0,1,\ldots,N-1;$$

- зворотне перетворення

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \; n = 0,1,\ldots,N-1,$$

де $x(n)$ - послідовність в часовій області (дійсна або комплексна);

$X(k)$ - дискретні коефіцієнти Фур’є (дійсні або комплексні);

k - номер відліку послідовності $X(k)$, що відповідає частоті $k\Delta\omega$ ($\Delta\omega$ - період дискретизації по частоті);

W_N^{nk} - повертаючий множник

$$W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk},$$

що отримав свою назву тому, що аргумент експоненти $e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ відображує кут повороту на одиничному колі комплексної площини.

Послідовності $x(n)$ та $X(k)$, що мають N відліків, називають N –точковими.

Відліки послідовності $X(k)$ називають відліками ДПФ.

3.4 Під час розрахунку ДПФ вважається, що послідовність відліків сигналу $x(n)$ являється періодично продовженою в часі. Якщо значення початкових та кінцевих відліків сегмента значно відрізняються, то при періодичному повторенні на стиках сегментів виникають скачки. Це приводить до розширення спектру сигналу (рис. 1).

Описане явище називається розтіканням спектру (spectrum leanage) [1-3].

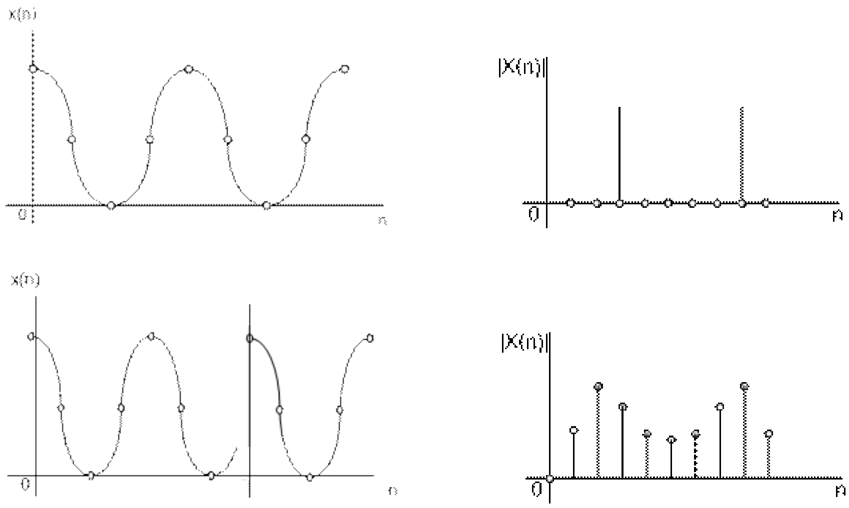


Рисунок 1 – ДПФ гармонічного сигналу.

Для зменшення явища розтікання спектру при розрахунку ДПФ використовують вагові функції, які також називають вікнами або віконними функціями. В цьому випадку, перед розрахунком ДПФ, сигнал множиться на вікно, яке повинно спадати до країв сегмента.

При використанні вікон ДПФ розраховується за формулою

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w(n) W_N^{nk} ,$$

де $w(n)$ - вагова функція (вікно) [1-3].

3.5 В даній лабораторній роботі використовуються вікна Блекмана (Blackman), Хеммінга (Hamming), Хеннінга (або Хена) (Hann). Ці віконні функції розраховуються за формулами [7]:

- вікно Блекмана

$$w(n)=\begin{cases}0,42-0,5\cos\dfrac{2\pi}{N-1}n+0,08\cos\dfrac{4\pi}{N-1}n, & 0\le n\le N-1\\ 0\end{cases},$$

- вікно Хеммінга

$$w(n)=\begin{cases}0,54-0,46\cos\dfrac{2\pi}{N-1}n, & 0\le n\le N-1\\ 0\end{cases},$$

- вікно Хеннінга

$$w(n)=\begin{cases}0,5-0,5\cos\dfrac{2\pi}{N-1}n, & 0\le n\le N-1\\ 0\end{cases}.$$

Характеристики вікон можна подивитись виконавши програму:

```
N = 64; % розмір вікна
w = window(@blackman,N); % вікно Блекмана
w1 = window(@hamming,N); % вікно Хеммінга
w2 = window(@hann,N); % вікно Хеннінга
wvtool(w,w1,w2)
```

4. Контрольні питання

4.1 Записати в загальному вигляді лінійне різницеве рівняння.

4.2 Перерахувати базові операції, що використовуються при реалізації лінійних цифрових фільтрів.

4.3 Дати визначення ДПФ.

4.4 Перерахуйте властивості ДПФ.

4.5 Поясніть явище розтікання спектру.

4.6 Віконні функції, їх властивості.

Рекомендована література

1. А. Оппенгейм, Р. Шафер. Цифровая обработка сигналов / Издательство „Техносфера”, Москва, 2006. – 856 с.
2. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций / Авторы: А.И. Солонина, Д.А. Улахович, С.М. Арбузов, Е.Б. Соловьева / Изд. 2-е испр. и перераб. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 758 с.: ил.
3. Цифровая обработка сигналов / А.Б. Сергиенко – СПб.: Питер, 2003. – 604 с.
4. Дьяконов В.П. MATLAB 6.5 SP1/7 + Simulink 5/6. Обработка сигналов и проектирование фильтров. – М.: СОЛОН-Пресс, 2005. – 576 с.
5. Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н. MATLAB 7. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.
6. Начало работы с MATLAB. (доступна на лабораторній роботі)
7. Довідкова система MATLAB Help.
8. Методичні вказівки до виконання розрахункової роботи по курсу “Цифрове оброблення сигналів».

ЗМІСТ