

**МОДИФІКАЦІЯ ІТЕРАЦІЙНОГО АЛГОРИТМУ ОБЧИСЛЕННЯ
ПРИРОЩЕНЬ ПОВЕРХНЕВИХ ПРОВІДНОСТЕЙ ПРИ
РОЗВ'ЯЗАННІ ЗВОРОТНОЇ ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОІМПЕДАНСНОЇ
ТОМОГРАФІЇ**

Сушко І. О., аспірантка

*Національний технічний університет України «Київський політехнічний
інститут» sushko@ros.kpi.ua*

**MODIFIKATION OF ITERATION ALGORITHM FOR COMPUTING THE
SURFACE CONDUCTIVITIES INCREMENTS SOLVING THE INVERSE
PROBLEM OF ELECTRICAL IMPEDANCE TOMOGRAPHY**

Sushko I., postgraduate student

National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute»

Вступ

Розв'язання задачі реконструкції розподілення поверхневих провідностей по вимірним напругам по обводу контуру фантома (зворотної задачі електроімпедансної томографії) пов'язане зі значними труднощами, викликаними великою розмірністю систем рівнянь як математичної моделі фантома при аналізі, так і процедури реконструкції [1–3]. Значною мірою ці труднощі можна подолати використанням для аналізу методу модифікацій [4–6] та методом зон провідностей [7–11] для синтезу (реконструкції). Але при вирішенні зворотної задачі (методом зон провідності) слід знаходити розв'язки систем рівнянь невеликих (шостого тридцятого) порядків, які є погано зумовленими (так само, як є погано зумовленими системи рівнянь високого порядку при застосуванні класичного підходу). Так, при використанні класичного методу Ньютон-Рафсона для обчислення прирощення на кожній k -й ітерації слід розв'язати рівняння

$$-[\partial z_m / \partial \sigma_r] \cdot [\Delta \sigma_r] = [\Delta z_m], \quad (1)$$

рішення якого має вигляд

$$-[\Delta \sigma_r] = [\partial z_m / \partial \sigma_r]^{-1} \cdot [\Delta z_m], \quad (2)$$

де $[\partial z_m / \partial \sigma_r]$ — матриця похідних від передаточних опорів (напруг по обводу контуру) по провідностям зон провідності порядку $N = 6 - 30$; $[\Delta \sigma_r]$ стовпець шуканих корегуючих прирощень поверхневої провідності зон порядку $N \times 1$; $[\Delta z_m]$ стовпець нев'язок передаточних опорів (різниця між вимірними значеннями та значеннями, обчисленими на попередній ітерації) порядку $N \times 1$.

Внаслідок поганої зумовленості матриці $[\partial z_m / \partial \sigma_r]$ скористатися формулою (2) для зворотної задачі електроімпердансної томографії неможливо. Тому використовують різні типи регуляризації [12, 13] процесу розв'язання рівняння виду (1). Так, рівняння (1) можна переписати у вигляді

$$-[\partial z_m / \partial \sigma_r]^T \cdot [\partial z_m / \partial \sigma_r] \cdot [\Delta \sigma_r] = [\partial z_m / \partial \sigma_r]^T \cdot [\Delta z_m], \quad (3)$$

де T — знак транспонування.

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$-[\Delta \sigma_r] = \left([\partial z_m / \partial \sigma_r]^T \cdot [\partial z_m / \partial \sigma_r] \right)^{-1} \cdot [\partial z_m / \partial \sigma_r]^T \cdot [\Delta z_m], \quad (4)$$

що дозволяє оперувати з більш гладкими функціями і тим поліпшити збіжність, але у випадку достатньої для точного обернення матриці $[\partial z_m / \partial \sigma_r]^T \cdot [\partial z_m / \partial \sigma_r]$ її зумовленості.

На жаль, визначник матриці $[\partial z_m / \partial \sigma_r]^T \cdot [\partial z_m / \partial \sigma_r]$ дорівнює квадрату і так вже малого визначника матриці $[\partial z_m / \partial \sigma_r]$. Тому наступним кроком є збільшення визначника матриці $[\partial z_m / \partial \sigma_r]^T \cdot [\partial z_m / \partial \sigma_r]$, але ціною внесення похибки, тобто рівняння (3) приводять до вигляду

$$\begin{aligned} & -\left([\partial z_m / \partial \sigma_r]^T \cdot [\partial z_m / \partial \sigma_r] + \alpha \cdot \overline{\overline{D}} \left([\partial z_m / \partial \sigma_r]^T \cdot [\partial z_m / \partial \sigma_r] \right) \right) \cdot [\Delta \sigma_r] = \\ & = [\partial z_m / \partial \sigma_r]^T \cdot [\Delta z_m] \end{aligned}$$

де $\overline{\overline{D}} = D \left([\partial z_m / \partial \sigma_r]^T \cdot [\partial z_m / \partial \sigma_r] \right)$ — діагональна матриця, діагональ якої утворено діагоналлю матриці $[\partial z_m / \partial \sigma_r]^T \cdot [\partial z_m / \partial \sigma_r]$;

α — позитивне число, таке мале, що внесена елементом $\overline{\overline{D}}$ матричного рівняння похибка суттєво не впливає на результат

$$-[\Delta \sigma_r] = \left([\partial z_m / \partial \sigma_r]^T \cdot [\partial z_m / \partial \sigma_r] + \alpha \cdot \overline{\overline{D}} \right)^{-1} \cdot [\partial z_m / \partial \sigma_r]^T \cdot [\Delta z_m], \quad (5)$$

де m — номер ітерації.

Так, при $\alpha = 0$ вираз (5) перетвориться до вигляду (4).

На жаль, при використанні виразу (5) задовільні результати реконструкції можна отримати не завжди. Це пов'язане з необхідністю підбирати в процесі обчислень значення α , з одного боку якомога меншим, щоб зменшити похибку, а з іншого боку збільшувати це значення для забезпечення зумовленості системи рівнянь. Так, досить успішно реконструюються неоднорідності в центрі фантома [8,12], що може бути достатнім для ідентифікації наявності кавітації [14] в трубі з рідиною, та по боках фантома (але

з деяким спотворенням форми неоднорідності [12]).

Тому більш прийнятним з точки зору точності обчислень є ітераційний метод регуляризації для точного обчислення прирощення корегуючих провідностей в рівнянні (1). За основу знов приймемо рівняння (3), але перепишемо його у вигляді

$$-\left[\partial z_m / \partial \sigma_r\right]^T \cdot \left[\partial z_m / \partial \sigma_r\right] \cdot \left[\Delta \sigma_r\right]^{(n)} - \alpha \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \left[\Delta \sigma_r\right]^{(n)} = \left[\partial z_m / \partial \sigma_r\right]^T \cdot \left[\Delta z_m\right] - \alpha \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \left[\Delta \sigma_r\right]^{(n-1)}. \quad (6)$$

При достатньо великій кількості ітерацій прирощення провідностей праворуч та ліворуч в (6) стануть рівними. При цьому значення α (хоча б теоретично) не впливає на похибку, але впливає на процес обчислень (кількість ітерацій, точність остаточного результату, яка залежить від кількості ітерацій внаслідок накопичення операційних похибок). Так, для найпростішого прикладу при погано зумовленій матриці $\left[\partial z_m / \partial \sigma_r\right]$ 2-го порядку обчислення за виразом (6) при різних α вимагає від сотень тисяч до мільйонів ітерацій.

Тому важливим є розроблення алгоритмів швидкого обчислення прирощень $\left[\Delta \sigma_r\right]$ за виразом (6).

Алгоритм прискорення ітераційних обчислень

Для пояснення запропонованого алгоритму перепишемо розв'язок рівняння (1) за допомогою виразу (6) в явному вигляді

$$-\left[\Delta \sigma_r\right]^{(n)} = \left(\left[\partial z_m / \partial \sigma_r\right]^T \cdot \left[\partial z_m / \partial \sigma_r\right] + \alpha \cdot \overline{\overline{D}} \right)^{-1} \cdot \left(\left[\partial z_m / \partial \sigma_r\right]^T \cdot \left[\Delta z_m\right] - \alpha \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \left[\Delta \sigma_r\right]^{(n-1)} \right). \quad (7)$$

Позначимо $\overline{\overline{\Psi}}^{-1} = \left(\left[\partial z_m / \partial \sigma_r\right]^T \cdot \left[\partial z_m / \partial \sigma_r\right] + \alpha \cdot \overline{\overline{D}} \right)^{-1}$ та розкриємо дужки в (7).

Отримаємо

$$\left[\Delta \sigma_r\right]^{(n)} = -\overline{\overline{\Psi}}^{-1} \cdot \left[\partial z_m / \partial \sigma_r\right]^T \cdot \left[\Delta z_m\right] + \overline{\overline{\Psi}}^{-1} \cdot \alpha \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \left[\Delta \sigma_r\right]^{(n-1)} \quad (7a)$$

Позначимо далі $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\Psi}}^{-1} \cdot \left[\partial z_m / \partial \sigma_r\right]^T \cdot \left[\Delta z_m\right]$; $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{\Psi}}^{-1} \cdot \alpha \cdot \overline{\overline{D}}$.

Тоді (7a) матиме вигляд

$$\left[\Delta \sigma_r\right]^{(n)} = -\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} \cdot \left[\Delta \sigma_r\right]^{(n-1)}. \quad (8)$$

Запишемо вираз (8) по ітераціям

$$\begin{aligned} \left[\Delta \sigma_r\right]^{(1)} &= -\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} \cdot \left[\Delta \sigma_r\right]^{(0)}; \\ \left[\Delta \sigma_r\right]^{(2)} &= -\overline{\overline{A}} - \overline{\overline{B}} \cdot \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} \cdot \left[\Delta \sigma_r\right]^{(0)}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 [\Delta\sigma_r]^{(n)} &= -\bar{A} - \bar{B} \cdot \bar{A} - \bar{B}^2 \cdot \bar{A} - \bar{B}^3 \cdot \bar{A} - \dots - \bar{B}^{n-1} \cdot \bar{A} + \bar{B}^n \cdot [\Delta\sigma_r]^{(0)} \\
 [\Delta\sigma_r]^{(n)} &= -\left[\bar{E} + \bar{B} + \bar{B}^2 + \bar{B}^3 + \dots + \bar{B}^{n-1} \right] \cdot \bar{A} + \bar{B}^n \cdot [\Delta\sigma_r]^{(0)}.
 \end{aligned}$$

При $n = \infty$ отримаємо теоретично точне значення прирощення $[\Delta\sigma_r]$.

При цьому матриця $\bar{B}^{\infty} = \bar{0}$ стає матрицею, усі елементи якої дорівнюють нулю. Тому при достатньо великих n складовою $\bar{B}^n \cdot [\Delta\sigma_r]^{(0)}$ можна знехтувати і результат не залежить від нульового наближення $[\Delta\sigma_r]^{(0)}$. Оскільки кількість ітерацій в (9) достатньо велика, є сенс переписати процедуру підсумувань правої частини цього виразу (в квадратних дужках) у вигляді

$$\begin{aligned}
 \bar{\beta}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & \bar{0}^T \\ \bar{A} & \bar{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{0}^T \\ \bar{\gamma}_1 & \bar{B} \end{bmatrix}; \quad \bar{\beta}_2 = \bar{\beta}_1 \cdot \bar{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \bar{0}^T \\ \bar{\gamma}_1 & \bar{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \bar{0}^T \\ \bar{\gamma}_1 & \bar{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{0}^T \\ \bar{\gamma}_2 & \bar{B}^2 \end{bmatrix}; \dots \\
 \bar{\beta}_n &= \bar{\beta}_{n-1} \cdot \bar{\beta}_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{0}^T \\ \bar{\gamma}_{n-1} & \bar{B} \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{10}$$

де $\bar{\gamma}_{n-1} = \left[\bar{E} + \bar{B} + \bar{B}^2 + \bar{B}^3 + \dots + \bar{B}^{n-1} \right] \cdot \bar{A}$.

Тут γ_i — стовпець поточних значень шуканого для (1) прирощення провідностей зон розміру $N \times 1$; $\bar{0}^T$ — рядок нулів розміру $1 \times N$.

Послідовна реалізація виразу (10) робить крок ітерацій логарифмічним, тобто, наприклад, за 10 множень отриманих матриць $\bar{\beta}_i$ саму на себе (коли степінь \bar{B}^i кожен раз подвоюється) переходимо від $\bar{\beta}_1$ (1 ітерація в(9)) до $\bar{\beta}_{1024}$ (1024 ітерація). Це дозволяє радикально підвищити швидкодію алгоритму (8). При цьому ітераційний процес зупиниться, коли $\bar{B}^n = \bar{0}$, а $[\Delta\sigma_r] = \bar{\gamma}_{n-1}$. Останнє можливе, якщо нескінченна геометрична матрична прогресія (в квадратних дужках в (10)) є спадною. Це дозволяє суму членів спадної геометричної матричної прогресії записати у вигляді

$$\bar{E} + \bar{B} + \bar{B}^2 + \bar{B}^3 + \dots + \bar{B}^{n-1} + \dots = \left(\bar{B} - \bar{E} \right)^{-1}. \tag{11}$$

Тоді $[\Delta\sigma_r] = \left(\bar{B} - \bar{E} \right)^{-1} \cdot \bar{A}$.

Покажемо деякі властивості запропонованого алгоритму на прикладах,

обраних виходячи з міркувань наочності і простоти перевірки отриманих результатів.

Приклад 1.

Нехай матриця похідних в (1) має вигляд

$$[\partial z_m / \partial \sigma_r] = \begin{bmatrix} 2,0001 & -1 \\ -1 & 0,5 \end{bmatrix}, \text{ а } [\Delta z_m] = \begin{bmatrix} 0,02 \\ -0,01 \end{bmatrix}.$$

Тоді згідно з (3)

$$[\partial z_m / \partial \sigma_r]^T \cdot [\partial z_m / \partial \sigma_r] = \begin{bmatrix} 2,0001 & -1 \\ -1 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2,0001 & -1 \\ -1 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,00040001 & -2,5001 \\ -2,5001 & 1,25 \end{bmatrix}.$$

Нехай $\alpha = 0,001$. Тоді згідно з (5)

$$[\partial z_m / \partial \sigma_r]^T \cdot [\partial z_m / \partial \sigma_r] + \alpha \cdot \bar{\bar{D}} = \begin{bmatrix} 5,00540041001 & -2,5001 \\ -2,5001 & 1,25125 \end{bmatrix}.$$

Визначник цієї матриці $\Delta = 0,01251$, а обернена матриця

$$\left([\partial z_m / \partial \sigma_r]^T \cdot [\partial z_m / \partial \sigma_r]\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 100,04 & 199,9 \\ 199,9 & 400,2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Добуток } \left([\partial z_m / \partial \sigma_r]^T \cdot [\partial z_m / \partial \sigma_r]\right)^{-1} \cdot [\partial z_m / \partial \sigma_r]^T = \begin{bmatrix} 0,202 & -0,096 \\ -0,3959 & 0,208 \end{bmatrix},$$

$$\text{а } \bar{A} \text{ в (8) } \bar{A} = \begin{bmatrix} 0,004997 \\ -0,009995 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Матриця } \bar{B} = \bar{\Psi}^{-1} \cdot \alpha \cdot \bar{D} = \begin{bmatrix} 0,50075 & 0,24987 \\ 1,0005 & 0,50025 \end{bmatrix}.$$

При обчисленнях за формулою (9) для того, щоб матриця $\bar{B}^n = \bar{0}$ слід зробити приблизно 262144 ітерацій, що видається занадто великою кількістю (враховуючи ще й те, що порядок матриці похідних дорівнює 2), щоб будувати на базі таких обчислень ітераційну процедуру навіть для невеликої кількості зон (14 – 30). Реалізація виразу (10) потребує 18 зведень матриць $\bar{\beta}_i$ для переходу від $\bar{\beta}_1$ до $\bar{\beta}_{262144}$, що вже є прийнятним.

Реалізуємо (за одне обернення матриці) вираз (11). При цьому

$$(\bar{B} - \bar{E}) = \begin{bmatrix} -0,49925 & 0,2499 \\ 1,00054 & -0,49975 \end{bmatrix}, \text{ а } (\bar{B} - \bar{E})^{-1} = \begin{bmatrix} 1000,4 & 500,18 \\ 2002,88 & 999,4 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Добуток } [\Delta \sigma_r]_{\alpha=0,001} = (\bar{B} - \bar{E})^{-1} \cdot \bar{A} = \begin{bmatrix} -3,6 \cdot 10^{-13} \\ 0,02 \end{bmatrix}, \text{ а підстанов-} \\ \text{ка } [\Delta \sigma_r]_{\alpha=0,001} \text{ в (1) дає } [\Delta z_m]_{\alpha=0,001} = \begin{bmatrix} 0,02000000000000131 \\ -0,01000000000000066 \end{bmatrix}, \text{ що непогано}$$

збігається з наданим значенням $[\Delta z_m] = \begin{bmatrix} 0,02 \\ -0,01 \end{bmatrix}$.

Для того ж прикладу оберемо $\alpha = 0,0001$. Отримаємо прирощення

$$[\Delta \sigma_r]_{\alpha=0,0001} = \begin{bmatrix} -1,02 \cdot 10^{-9} \\ 0,02 \end{bmatrix} \text{ і } [\Delta z_m]_{\alpha=0,0001} = \begin{bmatrix} 0,0199999979515887 \\ -0,0099999999988113 \end{bmatrix}.$$

Аналогічно, при $\alpha = 1$ $[\Delta \sigma_r]_{\alpha=1} = \begin{bmatrix} 1,4 \cdot 10^{-7} \\ 0,02 \end{bmatrix}$

та $[\Delta z_m]_{\alpha=1} = \begin{bmatrix} 0,0199999470931882 \\ 0,0099999735534442 \end{bmatrix}$.

Перевірка за (1) отриманих результатів дозволяє обчислити похибку при різних α . Ця похибка $[(\Delta z_m - \Delta z_{m,\alpha}) / \Delta z_m] = [\delta_\alpha]$ має наступні значення

$$[\delta]_{\alpha=0,001} = \begin{bmatrix} 0,000000000000655 \\ -0,00000000000066 \end{bmatrix}; [\delta]_{\alpha=0,0001} = \begin{bmatrix} 0,000000102420565 \\ -0,000000102420565 \end{bmatrix}$$

$$[\delta]_{\alpha=1} = \begin{bmatrix} 0,00000264534059 \\ -0,00000264465558 \end{bmatrix}.$$

Приклади обчислень зонного фантома

Для реконструкції образу з проєкцій будемо використовувати круглий фантом, розбитий на 776 квадратних скінченних елементів. Цей фантом розбито на 14 зон провідності (рис. 1).

Згідно з алгоритмом [15] для зонного фантома отримано матрицю похідних від вузлових напруг (в дужках на рис. 1) по провідностям зон (нумерацію зон наведено римськими цифрами на рис. 1).

Для розв'язання зворотної задачі в ітераційній процедурі методом Ньютона-Рафсона необхідно обернути матрицю похідних. Вузлові напруги, для яких обчислено похідні мають номери 1 – 15, крім 8 (рис. 1).

Підключення джерела струму було проведено для пар вузлів 0...8 (позиція1); 0...7 (2); 0...6 (3).

Велике значення при реалізації алгоритмів (1) – (9) має визначник матриці похідних. Так для кожної i -ї позиції було обчислено визначники

$$\Delta_1 = -1,41 \cdot 10^{-27}; \Delta_2 = -4,51 \cdot 10^{-13}; \Delta_3 = 3,11 \cdot 10^{-13}.$$

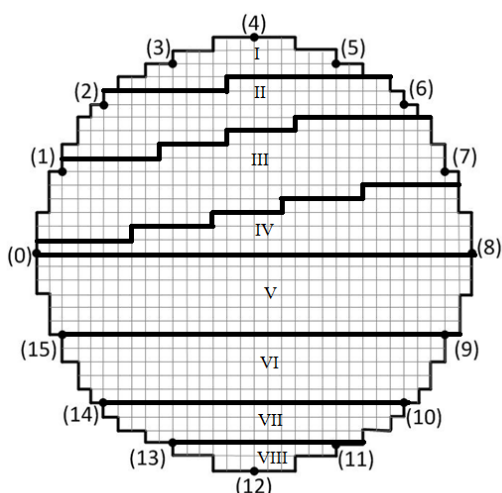


Рис. 1. Фантом з 776 скінченних елементів, розбитий на 14 зон.

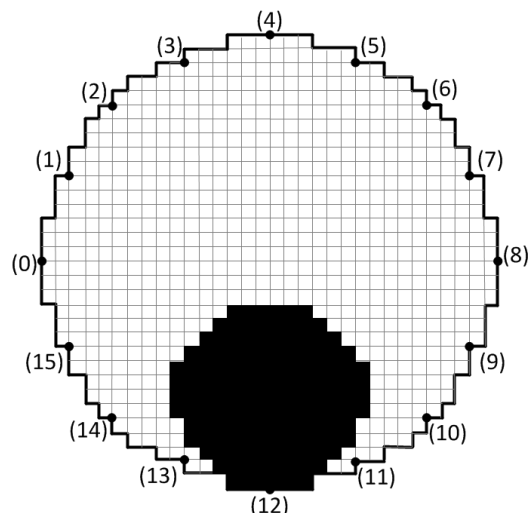


Рис. 2. Фантом з неоднорідністю внизу

З наведених даних випливає, що для першої позиції матриця похідних має визначник, що дорівнює нулю (внаслідок симетрії зон відносно підключення джерела струму) або машинному нулю, тобто конкретне ненульове значення Δ_1 є наслідком заокруглень за рахунок обмеженої розрядності операндів, і цю матрицю не можна використовувати для розв'язання зворотної задачі. Погано зумовлену матрицю для першої позиції можна обернути (з відносно високою точністю), але при цьому в матриці кожен стовець заповнений однаковими елементами, а їх значення дорівнюють числам порядку $10^{12} - 10^{14}$.

Останнє свідчить про необхідність використовувати несиметричне підключення джерела, що підтверджується зростанням визначників Δ_2 та Δ_3 зі зростанням асиметрії. Для сіх підключень джерела 1 – 3 проведено обчислення однієї ітерації загального ітераційного процесу обчислення розподілень поверхневих провідностей зон (рис. 1) для фантома з неоднорідністю (рис. 2). Для цього фантома різниця між обчисленими за виразами (3) – (11) значеннями прирощень $[\Delta\sigma_r]$ та їх точними значеннями оцінювалась відносною різницею між наданим значенням $[\Delta z_m]$ та значенням, що отримані підстановкою $[\Delta\sigma_r]$ в (1).

Так, для позиції 1 джерела струму отримуємо

$$[\Delta\sigma_r]_1^{(\alpha)} = [0,052; -0,137; 0,03; -0,113; 0,024; -3,9; 37,62; 12,9]^T$$

$$[\Delta\sigma_r]_1^{(\beta)} = [1,79; 1,58; 1,76; 1,61; -1,74; -5,64; 35,9; -14,62]^T$$

$$[\Delta\sigma_r]_1^{(\gamma)} = [0,76; 0,67; 0,141; 0,014; 0,014; 0,88; 3,99; 2,26]^T,$$

де $[\Delta\sigma_r]_1^{(\alpha)}$ — обчислено за формулами (10);

$[\Delta\sigma_r]_1^{(\beta)}$ — за формулами (11);

$[\Delta\sigma_r]_1^{(\gamma)}$ — за формулою (5).

Внаслідок поганої зумовленості, як матриці похідних, так і матриці $(\overline{B} - \overline{E})$ отримані результати дуже відрізняються між собою, а відносні похибки $\delta_1^{(i)} = (\Delta Z_{обч} - \Delta Z_{над}) / \Delta Z_{обч}$ мають значення

$$\delta_1^{(\alpha)} = [-0,0005; -0,0007; -0,0006; -0,0005; -0,002; 0,0032; 0,0032; -0,002]^T$$

$$\delta_1^{(\beta)} = [-0,0063; -0,0087; -0,0095; -0,0111; -0,0117; -0,0053; -0,0051; -0,0092]^T$$

$$\delta_1^{(\gamma)} = [-0,0007; 0,0041; 0,006; -0,0098; -0,0049; 0,0033; 0,0033; 0,0002]^T$$

Тут $\Delta Z_{обч}$ — значення, обчислене підстановкою $[\Delta\sigma_r]_1^{(i)}$ в вираз (1), а $\Delta Z_{над}$ — різниця між значенням передаточним опором фантома на попередньому кроці ітерації та виміряним. Дані значення не є прийнятними для одержання коректних результатів реконструкції (візуалізації) розподілення опорів усередині фантома. Значно кращі результати отримаємо при асиметричному підключенні джерела струму. Наприклад, для позиції 3

$$[\Delta\sigma_r]_3^{(\alpha)} = [-0,1404; 0,41; 0,1076; 0,1551; -0,0836; -0,078; 11,321; -1,4907]^T,$$

$$[\Delta\sigma_r]_3^{(\beta)} = [-0,1404; 0,41; 0,1076; 0,1551; -0,0836; -0,078; 11,321; -1,4907]^T,$$

$$[\Delta\sigma_r]_3^{(\gamma)} = [0,007; 0,448; 0,0625; 0,051; 0,0284; 0,9813; 4,157; 1,8965]^T;$$

$$\delta_3^{(\alpha)} = [7,3 \cdot 10^{-17}; -1,4 \cdot 10^{-17}; 2,8 \cdot 10^{-17}; -5,6 \cdot 10^{-17}; -5,6 \cdot 10^{-16}; 4,4 \cdot 10^{-16}; 2,7 \cdot 10^{-16}; -3,5 \cdot 10^{-16}]^T,$$

$$\delta_3^{(\beta)} = [9,4 \cdot 10^{-17}; -5,6 \cdot 10^{-17}; -8,3 \cdot 10^{-17}; -1,7 \cdot 10^{-16}; -7,2 \cdot 10^{-16}; 2,9 \cdot 10^{-16}; 4,1 \cdot 10^{-16}; -1,89 \cdot 10^{-16}]^T,$$

$$\delta_3^{(\gamma)} = [-4,47 \cdot 10^{-5}; -0,001; 0,0012; -0,002; -0,0036; 0,0017; 0,0011; 0,0013]^T.$$

Як видно з наведених даних, маємо майже повне співпадіння результатів розрахунків за виразами (10) та (11) і значну похибку при використанні виразу (5). Таким чином, асиметричне підключення джерела струму та використання запропонованих в роботі алгоритмів обчислення прирощень провідностей дає змогу відносно швидко (у порівнянні до безпосереднього використання виразу (8)) знайти достатньо точні значення $[\Delta\sigma_r]$, які задовольняють рівнянню (1).

Результати для другої позиції джерела струму аналогічні до результатів, отриманих для третьої позиції.

Як приклад, що ілюструє властивості розв'язання зворотної задачі методом зон провідності з використанням виразу (11), було розглянуто фантоми з провідністю фону $\sigma_0 = 1$ та з провідностями неоднорідностей $\sigma_1 = 0,5$. Були змодельовані неоднорідності у формі даних зон та проведені розрахунки при наявності таких неоднорідностей окремо та при комбінуванні їх одна з одною.

Усі результати обчислень (після 40 ітерацій) дали співпадіння реконструйованих та наданих результатів поверхневої провідності з точністю до 11-ої значущої цифри.

У випадку неоднорідностей, які мають форму круга, квадрата і т.д., внаслідок більшого «розсіяння» ліній рівної напруги усередині фантома в залежності від форми зон похибка буде більшою за рахунок «розповзання» неоднорідності по даній зоні та по суміжним зонам.

Висновки

1. Недоліком ітераційної процедури є необхідність навіть для матриць похідних невеликих порядків (6 – 30) виконувати $N = 2^M$, тобто тисячі – десятки мільйонів ітерацій.

2. Запропонована ітераційна процедура «з логарифмічним кроком» дозволяє отримати результат за M ітерацій замість 2^M класичного алгоритму, що радикально підвищує швидкість процедури обчислення корегуючих прирощень поверхневих провідностей.

3. Приведена безітераційна процедура обчислення корегуючих прирощень дозволяє отримати результат оберненням матриці невеликого (6 – 30) порядку за один крок.

4. Розроблені методи заміни ітераційної процедури уточнених обчислень прирощень корегуючих значень провідностей зон легко програмуються і дають задовільні результати.

5. При виявленні змодельованих неоднорідностей у формі зон фантому були отримані результати з точністю до 11-ї значущої цифри.

6. При виявленні неоднорідностей довільної форми характер та розташування неоднорідності зберігається, але відбувається певне «розповзання» на сусідні зони.

Перелік посилань

1. Brown V. H. Electrical Impedance Tomography/ V. H. Brown, D. C. Barber // *Clinical Physics and Physiological Measurement*. — 1992. — Vol. 13, Suppl. A. — 207p.

2. Электроимпедансная томография / Я. С. Пеккер, К. С. Бразовский, В. Ю. Усов, М. П. Плотников, О. С. Уманский. — Томск: ООО «Издательство научно-технической литературы», 2004. — 190 с.

3. Yorkey T. J. A comparison of impedance tomographic reconstruction algorithms / T. J. Yorkey, J. G. Webster // *Clin. Phys. Physiol. Meas.* — 1987. — Vol. 8, Suppl. A. — pp. 843—852.

4. Сушко І. О. Алгоритм розв'язання прямої задачі імпедансної томографії методом

модифікацій / І. О. Сушко // Вісник НТУУ «КПІ». Серія Радіотехніка. Радіоапаратобудування. — 2011. — № 47. — С. 165—175.

5. Рыбин А. И. Численно-символьный анализ электрических цепей обобщенным методом модификации / А. И. Рыбин // Праці Інституту Електродинаміки НАН України, ІЕД НАНУ. — 2002. — №1. — С. 28—30.

6. Сушко І. О. Потенційна чутливість імпедансної томографії / І. О. Сушко, Є. В. Гайдаєнко, О. А. Якубенко // Вісник НТУУ «КПІ». Серія Радіотехніка. Радіоапаратобудування. — 2012. — № 50. — С. 92—104.

7. Рибіна І. О. Метод променів провідностей та моделювання фантома в імпедансній томографії // Вісник ЖДТУ. — 2010. — № 2(53). — С. 160—161.

8. Сушко И. А. Визуализация распределения поверхностных проводимостей томографического сечения методом зон проводимости / И. А. Сушко // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2013. — Том 56, № 7. — С. 60—68.

9. Сушко И. А. Сравнение классического метода решения обратной задачи импедансной томографии с методом зон проводимости / И. А. Сушко, А. И. Рыбин // Вестник НТУУ «КПИ». Серія Радіотехніка. Радіоапаратостроєння. — 2012. — № 49. — С. 166—177.

10. Sushko I. O. Features of solving the Electrical Impedance Tomography inverse problem by zones conductivities method / I. O. Sushko, A. I. Rybin // Visn. NTUU KPI, Ser. Radioteh. radioaparatorobuduv. — 2012. — № 51. — С. 106—114.

11. Рибіна І. О. Розв'язання зворотної задачі імпедансної томографії методами зон провідностей та зворотної проєкції / І. О. Рибіна, О. І. Рибін, О. Б. Шарпан // Вісник НТУУ «КПІ». Серія Радіотехніка. Радіоапаратобудування. — 2011. — № 45. — С. 33—45.

12. Сушко І. О. Особливості використання методу регуляризації при розв'язанні зворотної задачі імпедансної томографії методом зон провідності / І. О. Сушко, О. І. Рибін // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2013. — №5. — С. 14—22.

13. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М. : Наука, 1979. — 288 с/

14. Сушко И. А. Оценка уровня кавитации методами импедансной томографии / И. А. Сушко, Е. В. Гайдаєнко, А. В. Мовчанюк, А. И. Рыбин // Вестник НТУУ «КПИ». Серія Радіотехніка. Радіоапаратостроєння. — 2012. — № 48. — С. 168—178.

15. Рибіна І. О. Обчислення похідних від передаточного опору по поверхневій провідності кінцевих елементів при розв'язанні зворотної задачі імпедансної томографії методом зон провідності. / І. О. Рибіна, О. І. Рибін, О. Б. Шарпан // Вісник НТУУ «КПІ». Серія Радіотехніка. Радіоапаратобудування. — 2011. — № 44. — С. 16—28.

References

1. Brown B.H. and Barber D.C. (1992) Electrical Impedance Tomography. *Clinical Physics and Physiological Measurement*. Vol. 13, Suppl. A, 207p.

2. Pekker Ya.S., Brazovskii K.S., Usov V.Yu., Plotnikov M.P. and Umanskii O.S. (2004) *Elektroimpedansnaya tomografiya* [Electrical impedance tomography]. Tomsk, Izdatel'stvo nauchno-tehnicheskoi literatury, 190 p.

3. Yorkey T.J. and Webster J.G. (1987) A comparison of impedance tomographic reconstruction algorithms. *Clin. Phys. Physiol. Meas.* Vol. 8, Suppl. A, pp. 843-852.

4. Sushko, I. O. (2011) Algorithm for solving the Electrical Impedance Tomography forward problem by the modification method. *Visn. NTUU KPI, Ser. Radioteh. radioaparatorobuduv.*, No. 47, pp. 165-175. (in Ukrainian)

5. Rybin A.I. (2002) *Chislenno-simvol'nyi analiz elektricheskikh tsepei obobshchennym*

metodom modifikatsii [Numerical and symbolic analysis of electric circuits by the generalized modification method]. Pratsi Instytutu Elektrodynamiky NAN Ukrainy, IED NANU, No 1, pp. 28–30.

6. Sushko I. O., Gaydayenko E. V. and Yakubenko A. A. (2012) Electrical Impedance Tomography potential sensitivity. *Visn. NTUU KPI, Ser. Radiotekh. radioaparatomobuduv.*, no. 50, pp. 92-104. (in Ukrainian)

7. Rybina I.O. (2010) Metod promeniv providnostei ta modeliuvannia fantoma v impedansnii tomografii [Rays conductivity method and simulation phantom in impedance tomography]. *Visnyk ZhDTU*, No 2(53), pp. 160–161.

8. Sushko I.A. (2013) Visualization of surface conductivity distributions of tomography cross-section using conductivity zones method. *Radioelectronics and Communications Systems*, Vol. 56, No 7, pp. 377-383.

9. Sushko I. O. and Rybin A. I. (2012) Comparison of classical and conductivity zones methods for solving EIT inverse problem. *Visn. NTUU KPI, Ser. Radiotekh. radioaparatomobuduv.*, no. 49, pp. 166-177. (in Russian)

10. Sushko I. O. and Rybin A. I. (2012) Features of solving the Electrical Impedance Tomography inverse problem by zones conductivities method. *Visn. NTUU KPI, Ser. Radiotekh. radioaparatomobuduv.*, no. 51, pp. 106-114.

11. Rybina I. O., Rybin A. I. and Sharpan O. B. (2011) Solving the Electrical Impedance Tomography (EIT) inverse problem by the conductivity and back projection methods. *Visn. NTUU KPI, Ser. Radiotekh. radioaparatomobuduv.*, no. 45, pp. 33-45. (in Ukrainian)

12. Sushko I.O., Rybin O.I. (2013) Osoblyvosti vykorystannia metodu reguliaryzatsii pry rozv'язanni zvorotnoi zadachi impedansnoi tomografii metodom zon providnosti [Features of the regularization method in solving the inverse problem of impedance tomography by zones of conductivity]. *Naukovi visti NTUU "KPI"*, No 5, pp. 14-22.

13. Tikhonov A.N. and Arsenin V.Ya. (1979) *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving incorrect problems]. Moscow, Nauka Publ., 288 p.

14. Sushko I. O., Gaydayenko E. V., Movchanyuk A. V. and Rybin A. I. (2012) Assessing the level of cavitation methods impedance tomography. *Visn. NTUU KPI, Ser. Radiotekh. radioaparatomobuduv.*, no. 48, pp. 168-178. (in Russian)

15. Rybina I. O., Rybin A. I. and Sharpan O. B. (2011) Determination of derivatives of transfer resistance on surface conductivity of finite elements by the conductivity method for solving the forward problem of Electrical Impedance Tomography. *Visn. NTUU KPI, Ser. Radiotekh. radioaparatomobuduv.*, no. 44, pp. 16-28. (in Ukrainian)

Сушко І. О. Модифікація ітераційного алгоритму обчислення приращень поверхневих провідностей при розв'язанні зворотної задачі електроімпедансної томографії. Запропоновано алгоритми заміни ітераційної процедури регуляризації за А. Н. Тихоновим ітераційною процедурою з логарифмічним кроком та не ітераційним обчисленням оберненої матриці, яка складається на базі матриць похідних від напруг (по обводу контуру) по поверхневим провідностям зон. Запропоновані алгоритми легко програмуються та забезпечують високу точність та хорошу збіжність ітераційної процедури реконструкції образу з проєкцій. Крім того, запропоновані алгоритми значно скорочують кількість арифметичних операцій та час обчислень на ЕОМ. Отримані результати ілюструються прикладами розрахунків.

Ключові слова: електроімпедансна томографія, метод зон провідності, регуляризація, матриця похідних, фантом, зворотна задача, точність, зумовленість матриць.

Сушко І. А. Модификация итерационного алгоритма вычисления приращений

поверхностных проводимостей при решении обратной задачи электроимпедансной томографии. Предложены алгоритмы замены итерационной процедуры регуляризации по А. Н. Тихонову итерационной процедурой с логарифмическим шагом и не итерационным вычислением обратной матрицы, составляемой на базе матриц производных от напряжений по обводу контура по поверхностным проводимостям зон. Предложенные алгоритмы легко программируются и обеспечивают высокую точность и хорошую сходимость итерационной процедуры реконструкции образа по проекциям. Кроме того, предложенные алгоритмы значительно сокращают количество арифметических операций и время вычислений на ЭВМ. Полученные результаты иллюстрируются примерами расчетов.

Ключевые слова: электроимпедансная, метод зон проводимости, регуляризация, матрица производных, фантом, обратная задача, точность, обусловленность матриц.

Sushko I. Modifikation of iteration algorithm for computing the surface conductivity increments solving the inverse problem of electrical impedance tomography.

Introduction. The replacement algorithms of regularization iterative procedure by A. Tykhonov with iterative procedure with logarithmic step and not iterative calculation of inverse matrix are proposed. The matrix is based on matrices of derivatives from contour voltages on zones surface conductivities.

The results. The results are illustrated by examples of calculations. The inhomogeneities in the form of zones and with arbitrary shape were simulated. The computation results and results of reconstruction are identical with accuracy to the 11th significant digit for inhomogeneities in the form of zones. Defying the inhomogeneity with arbitrary shape its character and location are maintained and there is a certain "spread" in the neighboring area.

Conclusions. The proposed algorithms are easily programmed and provide high accuracy and good convergence of iterative procedure of image reconstruction from projections. Besides the algorithms significantly reduce number of arithmetic operations and computation time on PC.

Keywords: Electrical Impedance Tomography, conductivity zones method, regularization, derivative matrix, phantom, inverse problem, accuracy, matrix conditionality.