

## МОДЕЛЮВАННЯ КІНЦЕВОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ОБ'ЄМНОГО ФАНТОМА В ІМПЕДАНСНІЙ ТОМОГРАФІЇ

Рибіна І.О., аспірантка

Національний технічний університет України  
"Київський політехнічний інститут", м. Київ, Україна

### Вступ

При моделюванні плоского фантома [1—5] вважалося, що струми від незалежного вимірювального джерела струму протікали лише по площині уявного (томографічного) розтину. Зрозуміло, що в реальних умовах вимірювання, якщо струм по площині розтину залежить від усіх поверхневих опорів цього розтину, то він залежить також від опорів шарів, які знаходяться над і під шаром розтину, що розглядається. Тому при вимірюваннях на плоский реконструйований фантом будуть падати «тіні» струмів інших шарів, по яким протікає струм незалежного вимірювального джерела струму.

Тобто при вимірюванні напруг (передаточних опорів) лише по обводу одного плоского розтину в напрузі на зчитувальних електродах неявно буде враховано і внесок складових струмів  $i_a$  (передаточних опорів) інших шарів тканини (рис.1,а), а не тільки струмів томографічного шару  $i_{ш}$ .

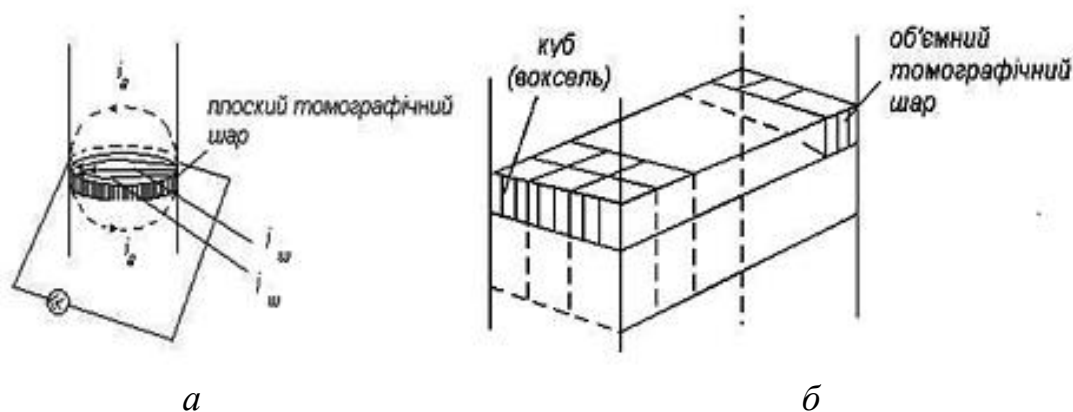


Рис.1

Тому хоча б для врахування впливу інших шарів на досліджуваний розтин слід розглядати не плоскі, а об'ємні кінцеві елементи — вокселі зображення — у вигляді кубів. Це дозволить врахувати «об'ємність» струмів як в такому, складеному з кубів, шарі, так і в декількох шарах, що знаходяться над і під шаром, до якого підімкнене джерело струму.

Як кінцевий елемент елементом «об'ємного» шару обираємо куб, оскі-

льки при цьому поле образу буде однорідним (ізотропним) вздовж осі X, Y, Z. Таким чином, перша дискретизація – це розбиття досліджуваної частини тіла біооб’єкту на шари певної товщини у вигляді набору кубів з різною об’ємною провідністю, яку можна отримати з поверхневої, вважаючи розподіл провідності усередині куба (вокселя) рівномірним.

Аналогічно до плоских моделей друга дискретизація – це заміна неперервного куба його електричною моделлю з резисторів, причому куби об’єднують між собою вже не гранями, а тільки вершинами кубів.

Розглянемо геометричний воксель (кінцевий елемент) у вигляді куба з ребром  $a$  (рис.2,а).

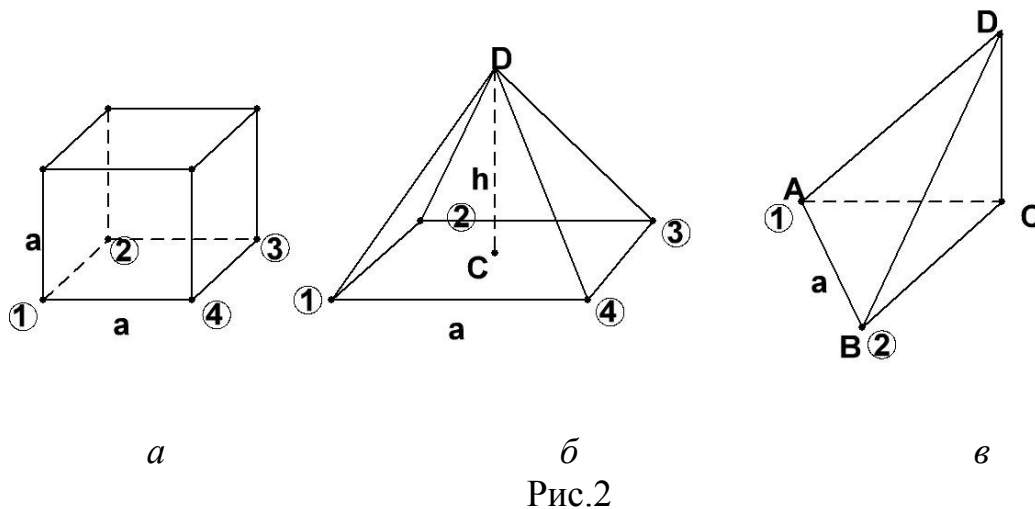


Рис.2

Оскільки куб (так само, як і квадрат) є «нестійкою» електричною фігурою, розіб’ємо куб на трикутні піраміди. Для створення ізотропного (однорідного) поля образу зробимо модель симетричною відносно усіх шістьох граней куба. Для цього представимо куб як сукупність шести пірамід висотою  $h = a/2$  з основою у вигляді квадрата зі стороною  $a$ . Вже цю піраміду (рис.2,б) розіб’ємо на чотири трикутні піраміди з основою у вигляді прямокутного трикутника (рис.2,в).

$$(\angle ACB = 90^\circ, AB = a, AC = BC = a\sqrt{2}/2, AD = BD = a\sqrt{3}/2).$$

На рис.3,а наведено геометричні розміри прямокутної піраміди та вузли, якими її електрична еквівалентна схема буде підімкнена до аналогічних кінцевих елементів при утворенні електричної моделі кубічного кінцевого елемента.

Еквівалентна електрична схема піраміди після другої дискретизації (для визначеності обчислень вузол 4 заземлено) матиме вигляд рис.3,б.

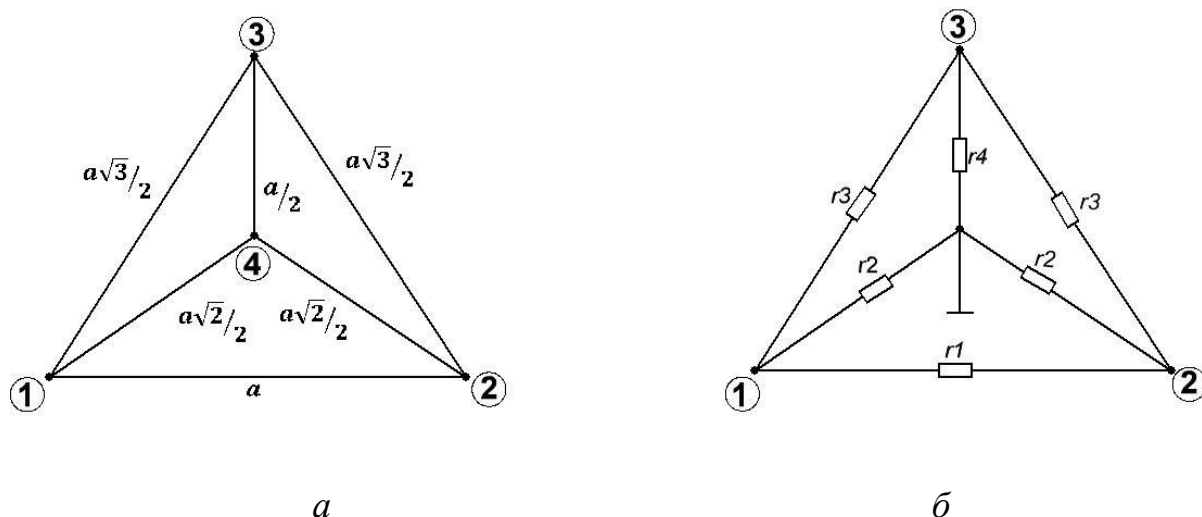


Рис.3

Якщо геометричний розмір  $a$  невеликий, вхідний опір фігури рис.2,в, відносно вузлів можна знайти за відомою формулою

$$R_{\text{вх}} = \rho_V \times l/V \quad \text{або} \quad R_{\text{вх}} = l/(\sigma_V \times V),$$

де  $\rho_V$  – питомий об’ємний опір Ом·м<sup>2</sup>;  $\sigma_V$  – питома об’ємна провідність См/м<sup>2</sup>;  $l$  – відстань між вхідними вузлами (вершинами піраміди);  $V$  – її об’єм.

Тоді об’єм піраміди рис.2,в

$$V = a^3/24,$$

а довжину граней наведено на рис.3, а.

Знайдемо відповідні вхідні опори

$$R_{(1+0)(1+0)} = R_{11} = (\rho_V \times a \times \sqrt{2}/2)/(a^3/24) = k \times \sqrt{2}/2,$$

де  $k = \rho a/(a^3/24)$ ;

$$R_{(2+0)(2+0)} = R_{22} = k \times \sqrt{2}/2;$$

$$R_{(3+0)(3+0)} = R_{33} = k \times 1/2; \tag{1}$$

$$R_{(1+3)(1+3)} = R_{11} + R_{33} - R_{13} - R_{31} = k \times \sqrt{3}/2;$$

$$R_{(2+3)(2+3)} = R_{22} + R_{33} - R_{23} - R_{32} = k \times \sqrt{3}/2;$$

$$R_{(1+2)(1+2)} = R_{11} + R_{22} - R_{12} - R_{21} = k.$$

Оскільки схема рис.3,б пасивна, то усі елементи оберненої матриці вузлових провідностей  $R_{ij} = R_{ji}$ , тому

$$R_{13} = R_{31} = (\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1)/4;$$

$$R_{23} = R_{32} = (\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1)/4; \tag{2}$$

$$R_{12} = R_{21} = (2\sqrt{2} - 2)/4.$$

За даними (1), (2) можна записати обернену матрицю вузлових провід-

ностей схеми рис.3,б у вигляді

$$\bar{R} = k \times \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}/4 & (2\sqrt{2}-2)/4 & (\sqrt{2}-\sqrt{3}+1)/4 \\ (2\sqrt{2}-2)/4 & 2\sqrt{2}/4 & (\sqrt{2}-\sqrt{3}+1)/4 \\ (\sqrt{2}-\sqrt{3}+1)/4 & (\sqrt{2}-\sqrt{3}+1)/4 & 2/4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

З (3) отримаємо обернену матрицю  $\bar{G} = \bar{R}^{-1}$ , елементи якої  $g_{ij}$  мають наступний вигляд

$$\begin{aligned} g_{11} = g_{22} &= (1/k) (-3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}) / (-7 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}); \\ g_{33} &= (1/k) (4\sqrt{2}-2)/8; \\ g_{12} = g_{21} &= -(1/k) (-5 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}) / (-7 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}); \\ g_{13} = g_{31} &= -(1/k) (1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) / (-7 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}); \\ g_{23} = g_{32} &= -(1/k) (1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) / (-7 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}). \end{aligned} \quad (4)$$

Оскільки в символічному вигляді матрицю  $\bar{G}$  у відповідності до рис.3,б можна представити як

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} g_1 + g_2 + g_3 & -g_1 & -g_3 \\ -g_1 & g_1 + g_2 + g_3 & -g_3 \\ -g_3 & -g_3 & g_1 + g_2 + g_3 \end{bmatrix},$$

то

$$\begin{aligned} k \times g_3 &= (1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) / (-7 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}); \\ k \times g_1 &= (-5 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}) / (-7 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}); \\ k \times g_4 &= (2\sqrt{2} + \sqrt{3} - 4) / (-7 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}); \\ k \times g_2 &= (1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) / (-7 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}). \end{aligned} \quad (4a)$$

Наступним кроком створення електричної моделі кубічного кінцевого елемента знайдемо обернену матрицю підсхеми рис.4, яка складається з двох прямокутних пірамід (рис.2,в).

Для цього за методом модифікацій [6—8] складемо матрицю еквівалентної схеми двох пірамід з об'єднаним загальним вузлом (рис.4,а).

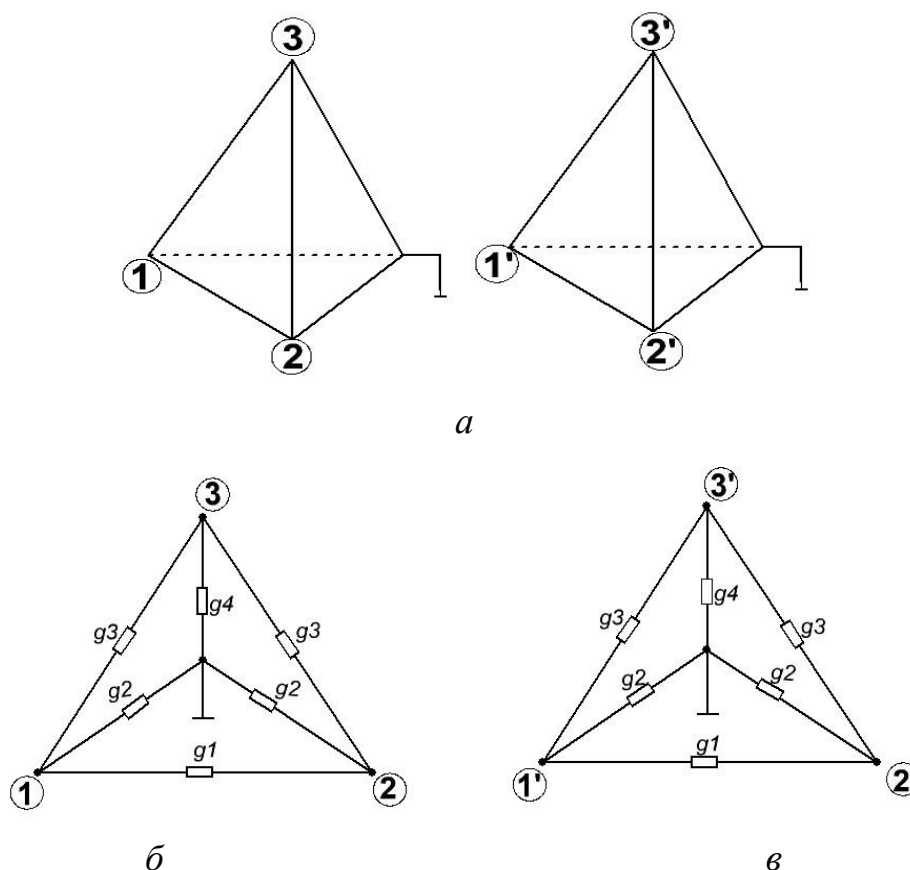


Рис.4

При цьому матриця

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} \bar{R}_{00} & \bar{R}_{00'} \\ \bar{R}_{0'o} & \bar{R}_{0'o'} \end{bmatrix} \quad (5a)$$

має нумерацію рядків і стовпців 1, 2, 3, 1', 2', 3', причому

$$\bar{R}_{00} = \bar{R}_{0'o'} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}/4 & (2\sqrt{2}-2)/4 & (\sqrt{2}-\sqrt{3}+1)/4 \\ (2\sqrt{2}-2)/4 & 2\sqrt{2}/4 & (\sqrt{2}-\sqrt{3}+1)/4 \\ (\sqrt{2}-\sqrt{3}+1)/4 & (\sqrt{2}-\sqrt{3}+1)/4 & 2/4 \end{bmatrix};$$

$$\bar{R}_{00'} = \bar{R}_{0'o} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5б)$$

Після «вирощування» короткого замкнення між вузлами 2 і 1', отримуємо матрицю  $\bar{R}_2$ , в якій 2 та 1' рядки та стовпці однакові (в схем єдиний вузол 2, 1'). Тому після викреслення рядка і стовпця з номером 1' матриця  $\bar{R}'_2$  має наступну нумерацію рядків і стовпців: 1, 2, 3, 2', 3', а елементами цієї матриці є  $R_{11} = R_{2'2'} = k \times (\sqrt{2} + 4)/8; R_{12} = R_{21} = R_{22'2'} = R_{2'2} = k \times (2\sqrt{2} - 2)/8; R_{22} = \sqrt{2}/4; R_{33} = R_{3'3'} = k \times (6 - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6})/16;$

$$R_{13}=R_{31}=R_{2'3'}=R_{3'2'}=k \times (3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+4-\sqrt{6})/16; \quad R_{12'}=R_{2'1}=k \times (3\sqrt{2}-4)/8; \\ R_{23}=R_{23'}=R_{32}=R_{3'2'}=k \times (\sqrt{2}-\sqrt{3}+1)/8; \quad R_{13'}=R_{32'}=R_{2'3}=R_{3'1} \\ =k \times (\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6})/8; \quad R_{33'}=R_{3'3}=k \times (2+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{6})/16.$$

За матрицею  $\bar{R}'_2$  отримаємо матрицю  $\bar{R}_3$  «виросуванням» короткого замкнення між вузлами 3 і 3' та викреслюванням з отриманого результату рядка та стовпця з номером 3'.

Матриця  $\bar{R}_3$  має нумерацію вузлів 1, 2, 3, 2'. Для зручності у подальшому номер 2' замінимо на номер 4. Тоді елементи матриці  $\bar{R}_3$  мають наступний вигляд

$$R_{11}=R_{44}=k \times (-1-3\sqrt{2}+3\sqrt{3}+2\sqrt{6})/(2(2-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6})); \\ R_{22}=k \times 2\sqrt{2}/8; \quad R_{33}=k \times 2/8; \\ R_{14}=R_{41}=k \times (-5+5\sqrt{2}-\sqrt{3})/(2(2-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6})); \\ R_{12}=R_{21}=R_{24}=R_{42}=k \times (2\sqrt{2}-2)/8; \\ R_{13}=R_{23}=R_{31}=R_{32}=R_{34}=R_{43}=(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})/8.$$

Об'єднуючи тепер дві еквівалентні електричні схеми для двох прямокутних пірамід (кожна з яких має обернену матрицю  $\bar{R}_3$ ), отримаємо зворотну матрицю для еквівалентної схеми чотирикутної піраміди з основою у вигляді квадрата (рис.5).

Зворотна матриця (опорів)  $\bar{R}_4$  для електричної еквівалентної схеми кінцевого елемента рис.5,а має наступні елементи (номери рядків та стовпців 1, 2, 3, 4, 5, загальний вузол знаходиться в центрі квадрата основи піраміди)

$$R_{11}=R_{22}=R_{44}=R_{55}=k \times (-1-3\sqrt{2}+3\sqrt{3}+2\sqrt{6})/(2(2-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6})); \\ R_{12}=R_{15}=R_{21}=R_{24}=R_{42}=R_{45}=R_{51}=R_{54}=k \times (\sqrt{2}-1)/8; \\ R_{33}=k \times 1/8; \\ R_{13}=R_{23}=R_{31}=R_{32}=R_{34}=R_{35}=R_{43}=R_{53}=k \times (1+\sqrt{2}-\sqrt{3})/16; \\ R_{14}=R_{25}=R_{41}=R_{52}=k \times (-5+5\sqrt{2}-\sqrt{3})/(2(2-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6})).$$

Для подальшого об'єднання шести кінцевих елементів (рис.5) зручно перенести в матриці  $\bar{R}_4$  (оберненій матриці провідностей електричної еквівалентної моделі цього кінцевого елемента) загальний вузол в вузол 3 і надати номер 3 вузлу «заземленому» на рис.5.б.

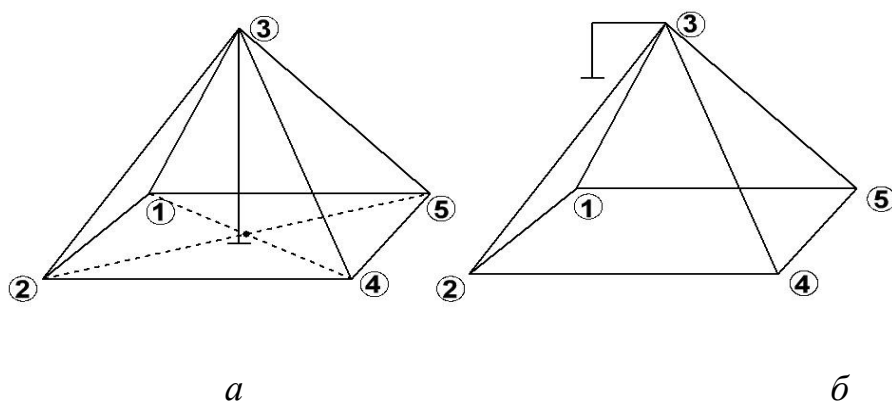


Рис.5

Згідно з формулами для заміни номера «заземленого» вузла [9] загальним вузлом зробимо вузол 3, а «заземленому до цієї заміни вузлу надамо номер 3. В одержаній таким чином матриці рядок і стовпець з номером 3 викреслимо (оскільки цей вузол не є входом еквівалентної схеми рис.5,б — номери вузлів подальших об'єднань дорівнюють 1, 2, 4, 5 — і не є вершиною результуючого кубічного кінцевого елемента).

Отже, результуюча матриця  $\bar{\bar{R}}_5$  для моделі рис.5, б має наступні елементи (нумерація рядків і стовпців 1, 2, 4, 5 — згідно з рис.5,б):

$$R_{11}=R_{22}=R_{44}=R_{55}=k \times (10-5\sqrt{2}+6\sqrt{3}-\sqrt{6}) / (8(2-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}));$$

$$R_{12}=R_{15}=R_{21}=R_{24}=R_{42}=R_{45}=R_{51}=R_{54}=k \times (-1+\sqrt{3}) / 8;$$

$$R_{14}=R_{25}=R_{41}=R_{52}=(2+11\sqrt{2}-2\sqrt{3}-5\sqrt{6}) / (8(2-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6})).$$

Матриця  $\bar{\bar{R}}_5$  в десяткових дробах має вигляд

$$\bar{\bar{R}}_5 = k \times \begin{bmatrix} 0,3702 & 0,09151 & 0,06282 & 0,09151 \\ 0,09151 & 0,3702 & 0,09151 & 0,06282 \\ 0,06282 & 0,09151 & 0,3702 & 0,09151 \\ 0,09151 & 0,06282 & 0,09151 & 0,3702 \end{bmatrix}.$$

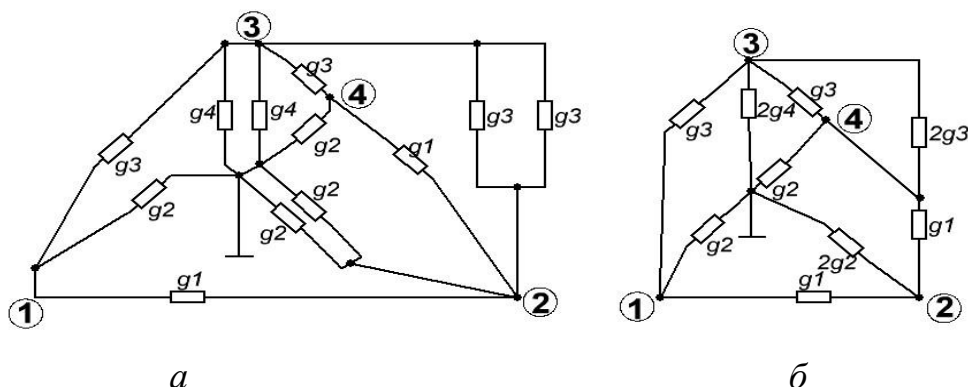


Рис.6

Для матриці  $\bar{\bar{R}}_5$  побудуємо матрицю провідностей системи рівнянь вузлових напруг. Для цього згідно з рис.4,а об'єднаємо дві еквівалентні схеми

(вузлу 2' схеми рис.4,б надамо номер 4). Аналогічним чином об'єднаємо схему рис.4,б із симетричною до неї, отримавши еквівалентну схему всієї піраміди із прямокутною основою рис.7

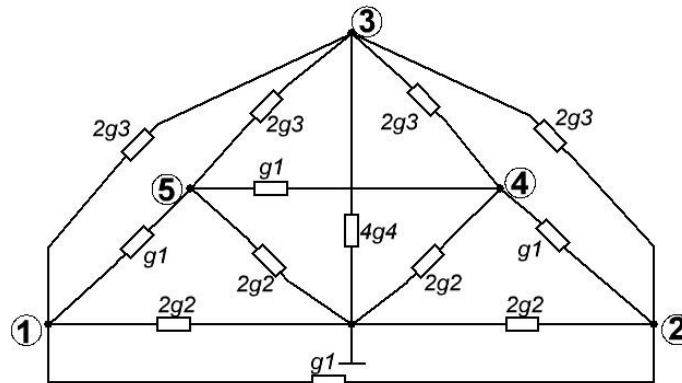


Рис.7

Перетворимо зірку з центром у загальному вузлі рис.7, яка складається з чотирьох гілок-променів  $2g_2$  (між «землею» і вузлами 1, 2, 4, 5) та  $4g_4$  (між «землею» і вузлом 3). Тоді за відомою формулою перетворення зірки отримаємо паралельні гілки із провідностями

$$g_a = \frac{4g_2^2}{8g_2+4g_4} = \frac{g_2^2}{2g_2+g_4} \quad (6)$$

до гілок між вузлами (4,2), (1,5), (1,4), (1,2), (5,4), (5,2) та гілки з провідностями

$$g_b = \frac{8g_2g_4}{8g_2+4g_4} = \frac{2g_2g_4}{2g_2+g_4},$$

підімкнені між вузлами (1,3), (5,3), (4,3), (2,3).

Отриману еквівалентну схему наведено на рис.8,а, а після підсумування провідностей паралельних гілок – на рис.8,б.

При цьому згідно з (4,а) та (6) отримаємо

$$g_a = \frac{6-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{(-7+3\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})(-2+3\sqrt{3})} \cdot \frac{1}{k} \quad g_b = \frac{-10+12\sqrt{2}-6\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{(-7+3\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})(-2+3\sqrt{3})} \cdot \frac{1}{k} \quad (7)$$

Аналогічним чином можна побудувати, наприклад, за схемою рис.7 еквівалентну схему кубічного кінцевого елемента рис.8,а і отримати матрицю провідностей цього кубічного пікселя. Так само, використовуючи зворотну матрицю  $\bar{\bar{R}}_5$  (для рис. 5,б), можна отримати зворотну матрицю кубічного кінцевого елемента рис. 2.8,а (з загальним вузлом в вершині кожної з об'єднаних шести пірамід рис. 2.8,б). Але внаслідок великої громіздкості виразів в радикалах для такої зворотної матриці наведемо результати обчислень в десяткових дробах. Так, матриця  $\bar{\bar{R}}_6$  (матриця  $\bar{\bar{R}}_5$  в десяткових дробах) має вигляд



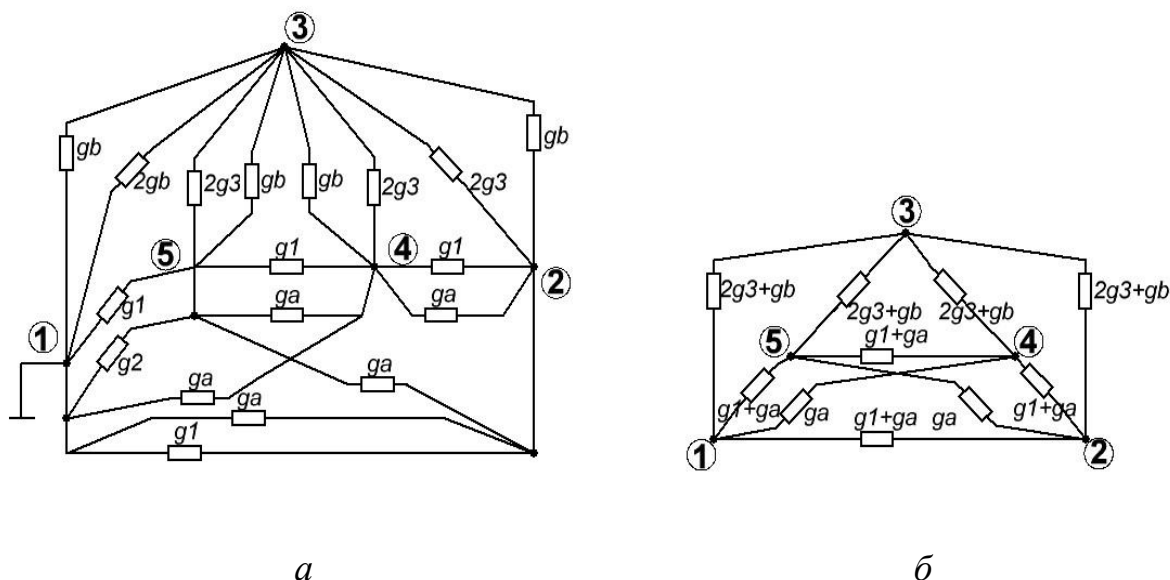


Рис. 8

$$\bar{R}_6 = k \times \begin{bmatrix} 0,3702 & 0,09151 & 0,06282 & 0,09151 \\ 0,09151 & 0,3702 & 0,09151 & 0,06282 \\ 0,06282 & 0,09151 & 0,3702 & 0,09151 \\ 0,09151 & 0,06282 & 0,09151 & 0,3702 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

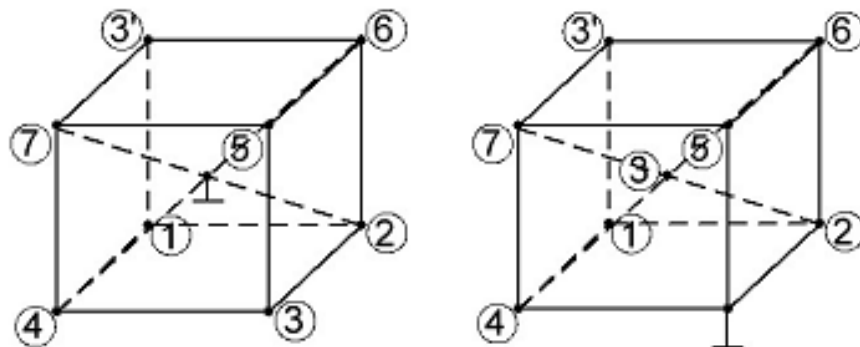
Вирішуючи відповідні зв'язки між шістьма пірамідами зі зворотними матрицями (8) і загальним вузлом в вершині (рис. 5,б), отримуємо зворотну матрицю кубічного кінцевого елемента (з загальним вузлом у центрі куба – рис. 9,а) в десяткових дробах у вигляді

$$\bar{R}_{\Sigma_{куб}} \times 1/k = \begin{bmatrix} 0,1177 & 0,01846 & 0,00883 & 0,01846 & 0,00883 & 0,004864 & 0,00883 & 0,01846 \\ 0,01846 & 0,1177 & 0,01846 & 0,00883 & 0,01846 & 0,00883 & 0,004864 & 0,00883 \\ 0,00883 & 0,01846 & 0,1177 & 0,01846 & 0,00883 & 0,01846 & 0,00883 & 0,004864 \\ 0,01846 & 0,00883 & 0,01846 & 0,1177 & 0,004864 & 0,00883 & 0,01846 & 0,00883 \\ 0,00883 & 0,01846 & 0,00883 & 0,004864 & 0,1177 & 0,01846 & 0,00883 & 0,01846 \\ 0,004864 & 0,00883 & 0,01846 & 0,00883 & 0,01846 & 0,1177 & 0,01846 & 0,00883 \\ 0,00883 & 0,004864 & 0,00883 & 0,01846 & 0,00883 & 0,01846 & 0,1177 & 0,01846 \\ 0,01846 & 0,00883 & 0,004864 & 0,00883 & 0,01846 & 0,00883 & 0,01846 & 0,1177 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Після переміщення загального вузла з середини куба (рис. 9,а) в вузол на одній з його вершин (рис. 9,б) після ви креслення рядка і стовпця з номером 3 (номер внутрішнього вузла, який при об'єднанні кубічних кінцевих елементів не приймає участі в розрахунках— рис. 9,в) отримуємо матрицю  $\bar{R}_{\Sigma_{куб}}$  (нумерація рядків і стовпців— 1, 2, 4, 6, 5, 7, 8) у вигляді

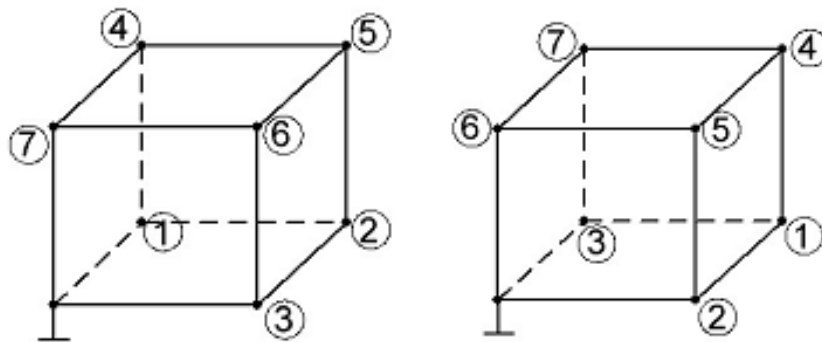
$$R_{\Sigma_{куб}} \times 1/k =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,2177 & 0,1089 & 0,1089 & 0,1089 & 0,09527 & 0,1089 & 0,1225 \\ 0,1089 & 0,1985 & 0,08961 & 0,1089 & 0,08961 & 0,09527 & 0,1032 \\ 0,1089 & 0,08961 & 0,1985 & 0,09527 & 0,08961 & 0,1089 & 0,1032 \\ 0,1089 & 0,1089 & 0,09527 & 0,2177 & 0,1089 & 0,1089 & 0,1225 \\ 0,09527 & 0,08961 & 0,08961 & 0,1089 & 0,1985 & 0,1089 & 0,1032 \\ 0,1089 & 0,09527 & 0,1089 & 0,1089 & 0,1089 & 0,2177 & 0,1225 \\ 0,1225 & 0,1032 & 0,1032 & 0,1225 & 1,1032 & 0,1225 & 0,2257 \end{bmatrix}$$



a

б



в

г

Рис.9

Після упорядкування номерів вузлів згідно з рис. 9,г отримаємо обернену матрицю (нумерація рядків та стовпців — 1, 2, 3, 4, 5, 7) провідностей еквівалентної електричної схеми кубічного елемента у вигляді

$$\bar{R}_{\text{куб}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,2177 & 0,1089 & 0,1089 & 0,1225 & 0,1089 & 0,09527 & 0,1089 \\ 0,1089 & 0,1985 & 0,08961 & 0,1032 & 0,1089 & 0,08961 & 0,09527 \\ 0,1089 & 0,08961 & 0,1985 & 0,1089 & 0,09527 & 0,08961 & 0,1089 \\ 0,1225 & 0,1032 & 0,1032 & 0,2257 & 0,1225 & 0,1032 & 0,1225 \\ 0,1089 & 0,1089 & 0,09527 & 0,1225 & 0,2177 & 0,1089 & 0,1089 \\ 0,09527 & 0,08961 & 0,08961 & 0,1032 & 0,1089 & 0,1985 & 0,1089 \\ 0,1089 & 0,09527 & 0,1089 & 0,1225 & 0,1089 & 0,1089 & 0,2177 \end{bmatrix} \times k. (10)$$

В разі комплексної питомої поверхневої або об'ємної провідності процедура обчислення параметрів електричної моделі (при відомих модулі та фазі питомої провідності) не відрізняється від наведених в роботі, враховуючи відомий ваговий коефіцієнт  $k$ , який обчислюється за виразом (1), і на який множать матрицю геометричних коефіцієнтів (10).

### Висновки

1. Використання плоского фантома навіть у випадку обчислення картини розподілення опорів одного розтину в імпедансній томографії приводить до систематичної похибки, викликаній тим, що струми від незалежного джерела струму протікають не лише в площині розтину, але й по інших шарах над та під відображеним шаром. Таким чином, на картину розподілення опорів в досліджуваному шарі падають «тіні» від інших шарів.

2. Для усунення «тіней» слід моделювати об'ємний фантом, який складається з декількох об'ємних шарів. Кінцевим елементом такого шару є воксель, який у роботі обрано у вигляді куба, що забезпечує однорідність об'ємного поля образу.

3. Побудовано електричну модель кубічного вокселя, який складається з шести чотирикутних пірамід, кожна з яких, в свою чергу, змодельована об'єднанням чотирьох трикутних пірамід з основою у вигляді рівнобедреного прямокутного трикутника з гіпотенузою, рівною ребру куба.

4. Для обчислення оберненої матриці одного шару фантома достатньо, зваживши значенням об'ємної питомої провідності обернену матрицю вокселя, виростити відповідні зв'язки (за методом модифікацій) між вершинами кубів. При цьому об'єднанням шарів аналогічним чином можна розв'язати пряму задачу для багатошарового об'ємного фантома.

5. Отримані результати вірні і для моделей фантома на частотах, більших 100 кГц, оскільки комплексний характер опорів враховується множенням оберненої матриці кінцевого елемента на його комплексний питомий опір.

6. За наведеною в роботі процедурою побудови електричної моделі куба можна побудувати електричну модель об'ємного кінцевого елемента довільної складної форми.

### Література

1. Рибіна І.О. Моделювання кінцевого елемента в імпедансній томографії / О.І. Рибіна, С.В. Гайдаєнко // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування.—

2010.— №4.— С.19—24.

2. Рыбина И.А. Решение прямой задачи импедансной томографии методами теории цепей // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування.— 2010.— №43.— С.4—13.

3. Рибіна І.О. Метод променів провідностей та моделювання фантома в імпедансній томографії // Вісник ЖДТУ. – 2010. – т.8 – № 4. – С.21—28.

4. Рибіна І.О., Рибін О.І., Шарпан О.Б. Обчислення похідних від передаточного опору по поверхневій провідності кінцевих елементів при розв'язанні зворотної задачі імпедансної томографії методом зон провідностей // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування. — 2011. — №44.— С.5—21.

5. Рибіна І.О., Рибін О.І., Шарпан О.Б. Розв'язання зворотної задачі імпедансної томографії методами зон провідностей та зворотної проекції // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування. – 2011.—№45.—С.5—18.

6. Рыбин А.И. Решение задач моделирования обращением матрицы методов взаимных производных // Изв. вузов "Радиоэлектроника".—1978.—№6.—С.35—47.

7. Рыбин А.И. Численно-символьный метод анализа электрических цепей обобщенным методом модификаций // Праці Інституту електродинаміки НАН України: Сб. наукових праць.—2002.—№1(1).—С.26—30.

8. Основи теорії кіл: Підручник для ВНЗ. Ч.2 /Ю.О. Коваль, Л.В. Гринченко, І.О. Милютченко, О.І. Рибін / За заг. ред. В.М. Шокала та В.І. Правди.—Харків: ХНУРЕ: Колегіум, 2006.—668с.

9. Rybin A.I., Trochimenko J.K., Rodionova M.V. Analysis of Irregular Networks using Diacoptic Modification of Admittance Matrix // Electronic Engineering (Czech rep.).—1993.— №4.—P.9—12.

*Рибіна І.О. Моделювання кінцевого елемента для об'ємного фантома в імпедансній томографії. При використанні плоского фантома «тіні» від струмів, що протікають під та над плоским томографічним шаром, падають на цей шар, що призводить до додаткових похибок в реконструйованому образі. Тому для моделювання процесів у досліджуваному об'єкті слід використовувати об'ємні ізотропні кінцеві елементи. В роботі для моделювання кінцевого елемента обрано куб. Для забезпечення його однорідності та визначеності електричної моделі куб моделюється як сукупність шести прямокутних (в основі) пірамід, кожна з яких, в свою чергу, складається з чотирьох трикутних пірамід (з рівнобедреним прямокутним трикутником в основі та гіпотенузою, рівною ребру куба). У випадку моделювання на частотах, більших 100 кГц питомі опори біотканини мають комплексний характер. Отримана в статті електрична модель куба (у вигляді оберненої матриці провідностей кубічного кінцевого елемента) в цьому разі буде мати комплексний ваговий множник  $k$ .*

**Ключові слова:** імпедансна томографія, кінцевий елемент, поверхнева та об'ємна провідності, кубічна модель, комплексний опір, фантом.

*Рыбина И.А. Моделирование конечного элемента для объёмного фантома в импедансной томографии. При использовании плоского фантома «тени» от токов, протекающих под и над плоским томографическим слоем, падают на этот слой, что приводит к дополнительным погрешностям в реконструированном образе. Поэтому для моделирования процессов в исследуемом объекте необходимо использовать объёмные изотропные конечные элементы. В работе для моделирования конечного элемента выбран куб. Для обеспечения его однородности и определённости электрической модели куб моделируется в виде совокупности шести (с квадратным основанием) пирамид, каждая из которых, в свою очередь, состоит из четырёх треугольных пирамид (с равносторонним прямоугольным треугольником в основании и с гипотенузой, равной ребру*

куба). В случае моделирования на частотах, больших 100кГц удельные сопротивления биотканей имеют комплексный характер. Полученная в статье электрическая модель куба (в виде обращенной матрицы проводимостей кубического гонечного элемента) в этом случае будет иметь комплексный весовой множитель  $k$ .

**Ключевые слова:** импедансная томография, конечный элемент, поверхностная и объёмная проводимости, комплексное сопротивление, фантом.

Rybina I.O. **Finite element modeling for volume phantom in Electrical Impedance Tomography.** Using surface phantom, "shadows" of currents, which flow below and under surface tomographic layers, include on this layer, that is cause of adding errors in reconstruction image. For processing modeling in studied object volume isotropic finite elements should be used. Cube is chosen for finite element modeling in this work. Cube is modeled as sum of six rectangular (in the base) pyramids, each pyramid consists of four triangular pyramids (with rectangular triangle in the base and hypotenuse, which is equal to cube rib) to provide its uniformity and electrical definition. In the case of modeling on frequencies higher than 100 kHz biological tissue resistivities are complex. In this case weight coefficient  $k$  will be complex in received cube electrical model (inverse conductivity matrix of the cube finite element).

**Keywords:** Electrical Impedance Tomography, finite element, surface and volume conductivities, complex resistance, phantom.