

## РАДІОТЕХНІЧНІ КОЛА ТА СИГНАЛИ

УДК 621.372.061:391.266

### АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ З ВИКОРИСТАННЯМ КРАТНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

*Рибін О.І., Ніжебецька Ю.Х., Рибіна І.О.*

#### Вступ. Постановка задачі

Аналіз лінійних систем, динамічну рівновагу яких описують системи лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, має важливе значення при проектуванні радіотехнічних, механічних, акустичних і т. ін. пристроїв. Для нелінійних систем розв'язання задачі аналізу також (в більшості випадків) зводиться до різноманітних методів лінеаризації. Серед відомих методів аналізу систем лінійних диференціальних рівнянь найбільш поширеними є методи, основані на перетвореннях Лапласа і Фур'є [1], а також (при аналізі в натуральних координатах) різницеві методи [2].

Універсальним методом розв'язання задачі аналізу є перетворення Лапласа. Але для його реалізації треба обчислити полюси функцій системи (кола), що вже для систем середньої складності (диференціальних рівнянь 10 – 20 порядку) становить неабиякі труднощі [3 – 7].

Альтернативним підходом до розв'язання диференціальних рівнянь є аналіз системи в натуральних координатах за допомогою різницевих методів [2]. Але найбільш зручним для аналізу лінійних систем є дискретне перетворення Фур'є (ДПФ).

#### Теоретичні викладки

При переході до ДПФ полегшується (наближене) обчислення зворотного перетворення порівняно з аналітичним перетворенням Фур'є. Крім того, відпадає необхідність в розв'язанні «вікової задачі», тобто пошуку полюсів функції системи. Але при цьому, оскільки частота власних коливань, що визначається уявною частиною координат полюсів, невідома, виникає невизначеність з вибором кроку дискретизації. Тим не менше, простота реалізації алгоритму аналізу лінійних систем визначає надзвичайно широке розповсюдження в інженерній практиці саме ДПФ.

Порядок обчислень реакції  $y(t)$  системи при використанні ДПФ можна описати виразом

$$\bar{y}_t = (\bar{F}_H^*)^T \cdot \bar{K}(jk\omega_1) \cdot \bar{F}_H \cdot \bar{S}_t, \quad (1)$$

де  $\bar{y}_t$ ,  $\bar{S}_t$  – стовпці дискретних відліків реакції та дії відповідно, розміру  $N \times 1$ ;  $\bar{F}_H$ ,  $\bar{F}_H^*$  – нормовані матричні оператори прямого та зворотного перетворення Фур'є порядку  $N$ ,  $\bar{K}(jk\omega_1)$  – діагональна матриця порядку  $N$ , в діа-

гоналі якої записані значення системної функції на дискретних частотах.

Інший алгоритм обчислення реакції (який є результатом дискретного перетворення Фур'є для різницевих методів) має вигляд [8–12]

$$\bar{y}_t = (\bar{F}_H^*)^T \cdot \bar{K}(\lambda) \cdot \bar{F}_H \cdot \bar{S}_t, \quad (2)$$

де  $\bar{K}(\lambda)$  – діагональна матриця (порядку  $N$ ) системних функцій, обчислених на власних частотах  $\lambda_i$  [8–12].

При реалізації виразів (1), (2) використано теорему про інтегрування та диференціювання оригіналу, яка полягає в множенні на  $kj\omega_1$ , або  $\lambda_k$  сигналів ДПФ в разі диференціювання оригіналу та в їх діленні на  $kj\omega_1$  та  $\lambda_k$  в разі інтегрування.

Різницю в результаті застосування (1) та (2) наведено в роботі [13]. Цікавою особливістю виразу (2) є те, що на його основі можна отримати кратні перетворення. Так, наприклад, якщо для аналізу сигналу використовують перетворення Уолша-Адамара [14], формулу (2) можна привести до вигляду [8,9]

$$\bar{y}_t = \bar{W}_H^T \cdot \bar{P}^* \cdot \bar{K}(\lambda) \cdot \bar{P}^T \cdot \bar{W}_H \cdot \bar{S}_t, \quad (3)$$

де  $\bar{W}_H, \bar{W}_H^T$  – нормовані матриці прямого та зворотного перетворення Уолша-Адамара (в яких нормування проведене множенням їх рядків на  $1/\sqrt{N}$ );  $\bar{P}$  – матриця власних векторів дискретного матричного оператора  $\bar{A} = \bar{W}_H \cdot \bar{D}_H^T$ ;  $\bar{D}_H^T$  – матричний (нормований) оператор, отриманий диференціюванням (за натуральною координатою) матриці  $\bar{W}_H$ . Оскільки розклад [8, 10, 12] (для будь-якого матричного ортогонального перетворення  $\bar{P}_H$ ) на власні значення і власні вектори матриці  $\bar{A}_p$  завжди дає ті самі власні значення  $\lambda_i$  в (1) – (3) та різні власні вектори  $\bar{P}_p$ , а добуток цього перетворення і отриманих для нього власних векторів завжди дає (при еквідистантній дискретизації) матричний оператор ДПФ

$$\bar{P}_p^T \cdot \bar{P}_H = \bar{F}_H, \quad (4)$$

то найпростішим способом обчислення матриці  $\bar{P}$  в (3) і (4) є добуток матриць

$$\bar{P}_p^T = \bar{F}_H \cdot \bar{P}_H^{-1} = \bar{F}_H \cdot (\bar{P}_H^T)^* \quad (5)$$

де  $\bar{P}_H$  – нормований матричний оператор обраного для аналізу сигналу  $s(t)$  ортогонального перетворення, тобто в загальному випадку формулу (3) можна записати у вигляді

$$\bar{y}_t = \bar{P}_H^{*T} \cdot \bar{P}_p^* \cdot \bar{K}(\lambda) \cdot \bar{P}_p^T \cdot \bar{P}_H \cdot \bar{S}_t. \quad (6)$$

Особливістю цього матричного оператора є те, що відліки ортогональних функцій (рядки  $\bar{P}_H$ ), одержані зі зсувом на півкроку дискретизації, що, наприклад, в разі використання косинусного перетворення в  $\bar{P}_H$  забез-

печує ортогональність рядків. Крім того одержана для такого оператора  $\overline{P}_n$  матриця  $\overline{P}_p^T$  в (4), (5) в загальному випадку матиме ортогональні рядки, але неортогональні стовпці (як це слід очікувати для транспонованої матриці власних векторів).

Ортогоналізацію стовпців матриці  $\overline{P}_p^T$  можна провести, виносячи праворуч в діагональну матрицю  $\overline{J}$  дійсні та уявні одиниці.

Так, у випадку, коли матриця  $\overline{P}_n$  є дискретним матричним перетворенням Адамара, першими елементами діагоналі є 1,  $-j$ . Для матриці  $\overline{P}_n$  четвертого порядку два наступних елементи утворюють заміною одиниці на  $-j$  та  $-j$  на 1.

Для матриці  $\overline{P}_n$  восьмого порядку додаткові чотири елементи утворюються такою самою заміною і т.д. Так, наприклад, для матриці  $\overline{P}_n$  шістнадцятого порядку матимемо

$$1, -j, -j, 1, -j, 1, 1, -j, -j, 1, 1, -j, 1, -j, -j, 1.$$

В разі, якщо  $\overline{P}_n$  є дискретним матричним оператором косинусного перетворення, матимемо в діагоналі 1,  $-j$ , 1,  $-j$ , 1,  $-j$ ... і т.д.

Отже, добуток  $\overline{P}_n^{*T} \overline{P}_p^*$  та  $\overline{P}_p^T \overline{P}_n$  в (6) слід записати у вигляді  $\overline{P}_n^{*T} \overline{J} \overline{P}_p^*$  та  $\overline{P}_p^T \overline{J} \overline{P}_n$ , де  $\overline{P}_p^T$  і є матрицею шуканих власних векторів.

Враховуючи, що спектр  $\overline{S}_\xi$  обраного перетворення  $\overline{P}_n$  для вхідного та вихідного сигналів є добутком  $\overline{S}_\xi = \overline{P}_n^T \overline{S}_t$  та  $\overline{y}_\xi = \overline{P}_n^T \overline{y}_t$ , множенням цих спектрів на  $\overline{J}$  одержимо комплексні спектри, перехід до яких від спектрів дійсного перетворення забезпечується множенням деяких рядків та стовпців  $\overline{S}_\xi$  та  $\overline{y}_\xi$  відповідно на одиницю, або на  $\pm j$   $\overline{y}_\xi = \overline{y}_\xi \overline{J}^*$  та  $\overline{S}_\xi = \overline{J} \overline{S}_\xi$ .

Таким чином, вираз (6) перетвориться до вигляду:

$$\overline{y}_\xi = \overline{P}_p^* \cdot \overline{K}(\lambda) \cdot \overline{P}_p^T \cdot \overline{S}_\xi, \quad (7)$$

де  $\overline{y}_\xi$ ,  $\overline{S}_\xi$  – комплексні спектри дії та реакції за перетворенням  $\overline{P}_n$ .

При цьому структура виразу (7) формально нічим не відрізняється від структури формул (1) та (2).

Отже, матриці власних векторів  $\overline{P}_p^*$ ,  $\overline{P}_p^T$  можна вважати дискретними операторами ортогональних перетворень, але для дії і реакції не в натуральних координатах, а представлених комплексним ортогональним перетворенням  $\overline{P}_n$ .

Рядки матриці  $\overline{P}_p^T$  при цьому слід вважати дискретними відліками кра-

тного ортогонального (другого за чергою після  $\overline{\overline{P}}_H$ ) перетворення, а стовпці матриці  $\tilde{P}_p^*$  – дискретними відліками трансформант зворотного кратного перетворення. Таке перетворення в ряді випадків аналізу сигналів і систем є зручним, виходячи з наступних міркувань.

Існування великої кількості ортогональних перетворень (відмінних від перетворення Фур'є) виправдане їх зручністю при аналізі сигналів певних класів. Так, відомо, що косинусне перетворення [14, 15] має спектр трансформант в середньому в 3–4 рази вужчий, ніж спектр Фур'є в разі аналізу мовних (і інших) біосигналів. Перетворення Уолша є зручними при кодуванні сигналів, а похиле перетворення [15] є найбільш економічним при аналізі телевізійних сигналів і. т. ін. Ці властивості використовують при стисненні, кодуванні, архівації інформації. Проблеми виникають при необхідності аналізу проходження сигналу через певну систему, оскільки, як відомо, найбільш ефективним методом розв'язання диференціальних рівнянь рівноваги системи є метод перетворення Фур'є (і споріднених з ним Лапласа і z). Тому такий аналіз звичайно й роблять за допомогою перетворення Фур'є. При цьому для аналізу диференціальних рівнянь і саме сигналу трансформанти мають різний сенс, що значно затрудняє узагальнення отриманих результатів.

Аналіз за виразом (7) дозволяє поєднати ефективно для сигналів зворотного класу ортогональне перетворення  $(\overline{S}_\xi, \overline{y}_\xi)$  та метод аналізу в трансформантах  $\tilde{P}_p$ , для яких виконується теорема про диференціювання оригіналу  $\overline{S}_t$ . При цьому трансформанти  $P_k$  з матриці  $\tilde{P}_p$  множаться на власні числа  $\lambda_k$  з (2).

Оскільки матриця  $\overline{K}(\lambda)$  діагональна, трансформанти перетворення  $\overline{\overline{P}}_p$  незалежні в тому сенсі, що результатом дії кожної k-ої трансформанти буде реакція у вигляді тієї самої трансформанти. Для усіх ортогональних перетворень, крім перетворення Фур'є (і споріднених) дія у вигляді трансформанти дає реакцію, яка складається з великої кількості інших трансформант того самого перетворення. Так, в виразі (3) для перетворення Уолша-Адамара, якщо позначити  $\overline{\Theta} = \tilde{P}^* \cdot \overline{K}(\lambda) \cdot \tilde{P}^T$ ,

одержимо форму, аналогічну (7) або (1), (2), але матриця  $\overline{\Theta}$  буде завжди недіагональною

$$\overline{y}_t = \overline{\overline{W}}_H^T \cdot \overline{\Theta} \cdot \overline{\overline{W}}_H \cdot \overline{S}_t. \quad (8)$$

Вирази (1) і (2) можна також переписати у вигляді, подібному (3)

$$\overline{y}_t = \overline{\overline{F}}_H^{*T} \cdot \tilde{P}^* \cdot \overline{K}(\lambda) \cdot \tilde{P}^T \cdot \overline{\overline{F}}_H \cdot \overline{S}_t,$$

але для цього виразу  $\overline{\overline{P}} = \overline{\overline{E}}$ , де  $\overline{\overline{E}}$  – одинична матриця.

Для інших перетворень матриці  $\overline{\overline{P}}$  недіагональні, тому й матриця  $\overline{\Theta}$  – недіагональна.

Реалізація запропонованого алгоритму

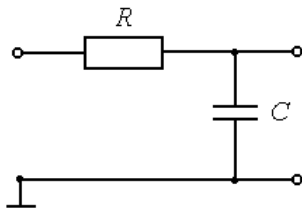


Рис. 1.

Як приклад, розглянемо коло (рис. 1), обране, виходячи з міркувань простоти ілюстрації та перевірки отриманих результатів. Нехай на вхід кола рис. 1 поступає сигнал рис. 2. Його спектр за Адамаром має вигляд рис. 3.

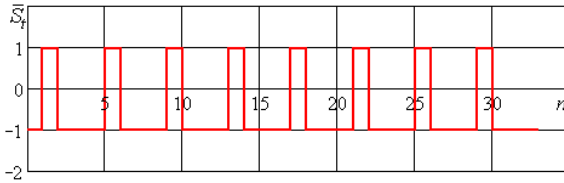


Рис. 2. Вхідний сигнал

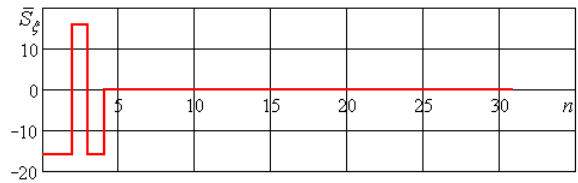


Рис. 3. Спектр за Адамаром вхідного сигналу

Деякі трансформанти ортогонального перетворення  $\tilde{\Pi}_p^T$  в (7) наведено на рис. 4 це перетворення з дійсним ядром, оскільки фазові множники  $\pm j = e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$  враховані в комплексному спектрі, одержаному зі спектра Адамара на рис. 3.

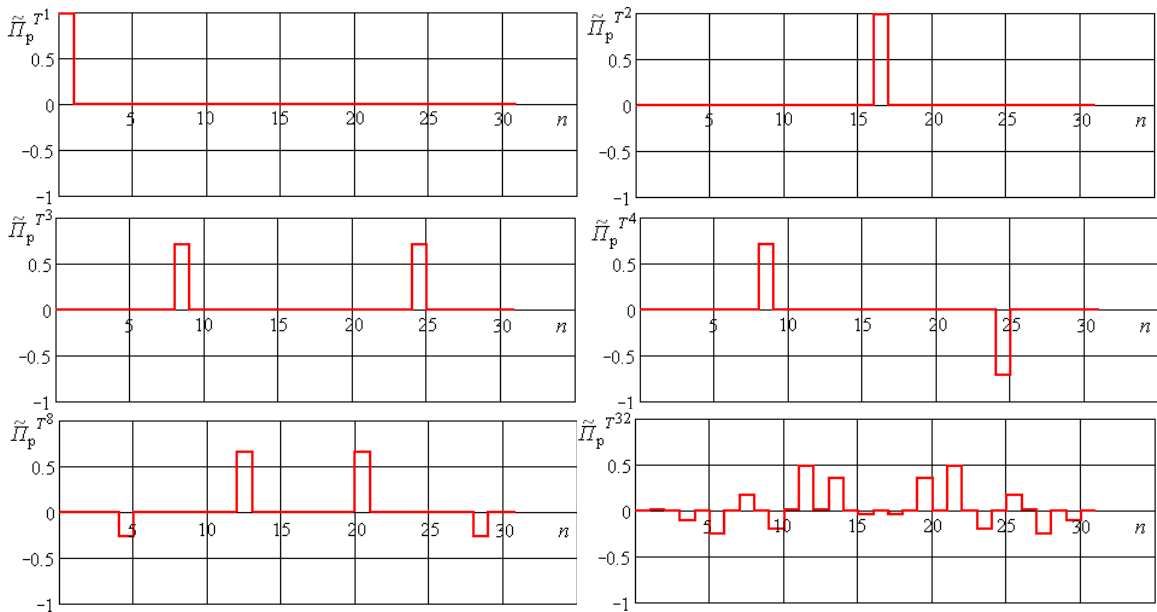


Рис. 4. Деякі трансформанти ортогонального перетворення  $\tilde{\Pi}_p^T$

Одержане вихідне перетворення Адамара (спочатку комплексне, а потім – дійсне з урахуванням множника  $\overline{J}^*$ ) наведено на рис. 5.

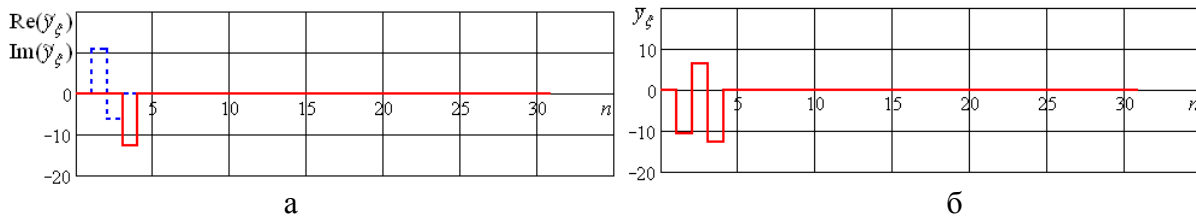


Рис. 5. Спектр за Адамаром вихідного сигналу

а – дійсна і уявна частина спектру; б – дійсний спектр з урахуванням множника  $\overline{J}^*$

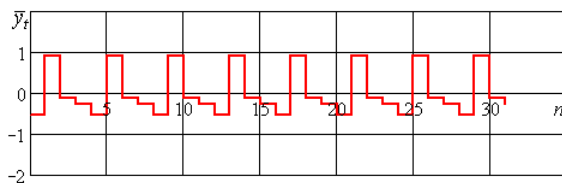


Рис.6. Вихідний сигнал

Вихідний сигнал  $\overline{y}_t$  (що співпадає з вихідним сигналом системи, розрахованим за допомогою перетворення *RTF* [8 – 12]) наведено на рис. 6.

### Алгоритм кратного перетворення

Наведений приклад ілюструє загальний алгоритм використання кратного перетворення для аналізу проходження через лінійну систему сигналу, представленого його спектром, а саме: 1) вхідним сигналом системи вважати спектр сигналу в обраному координатному базисі (в розглянутому прикладі - спектр за Адамаром); 2) перейти до комплексного спектру множенням "вхідного сигналу" (спектра) на відповідні множники  $\pm j$  або 1; 3) перетворити за допомогою ортогонального перетворення  $\overline{P}_p^T$  "вхідний сигнал"; 4) знайти реакцію системи на цей сигнал множенням одержаного кратного спектра на  $\overline{K}(\lambda_i)$ ; 5) зробити зворотне перетворення  $\overline{P}_p^*$  і знайти "вихідний сигнал" (комплексний спектр), який перетворити (в прикладі комплексний спектр Адамара) в дійсний спектр.

### Висновки

При реалізації алгоритму кратного перетворення операції проводяться не з графоелементами сигналу в натуральних координатах, а з графоелементами його спектру, тобто в базисі, обраному для аналізу цього сигналу. Це, звичайно, потребує ортогонального перетворення  $\overline{P}_p^T$  (відмінного від перетворення Фур'є та з дійсним ядром, якщо початкове перетворення було перетворенням з дійсним ядром) так само, як для сигналів в натуральних координатах перетворення Фур'є. Запропонований метод і алгоритм кратного перетворення легко програмується на ПЕОМ і є зручним для дослідження.

### Література

1. Основи теорії кіл : підручник для студентів вищих навчальних закладів. Ч.2 / Ю.О. Коваль, Л.В. Грінченко, І.О. Милютченко, О.І. Рибін; за заг. редакцією В.М. Шокала та В.І. Правди. – Х. : Компанія СМІТ, 2008 – 560 с.
2. Годунов С.К., Рябенський В.С. Разностные схемы / М. : Наука. – 1973.
3. Рыбин А.И. Анализ цепей методом модификаций с нормированием «выращи-

ваемых» параметров // Радиоэлектроника. – 2001. – №6. – С.42 – 52.

4. Трохименко Я.К., Рыбин А.И., Плавнева Е.Г. Вычисление корней определителей матрицы иммитасов методом модификаций // Радиоэлектроника. – 1987. – №11. – С.30 – 37. (Изв. высш. учеб. заведений).

5. Трохименко Я.К., Рыбин А.И., Плавнева Е.Г. Алгоритм коррекции для поиска корней определителей матрицы иммитансов // Радиоэлектроника. – 1988. – №1. – С.63 – 69. (Изв. высш. учеб. заведений).

6. Рыбин А.И., Ястребов Н.И. Коррекция координат корней функции цепи при объединении помех // Вестник КПИ. Сер. Радиотехника. – 1989. – №26. – С.65–66.

7. Трохименко Я.К., Рыбин А.И., Ястребов Н.И. Декомпозиционный алгоритм символьного анализа для поиска собственных значений матриц эквивалентных параметров электрических цепей методом модификаций // Радиоэлектроника. – 1989. – №6. – С.50 – 60. (Изв. высш. учеб. заведений).

8. Рибін О.І., Ткачук А.П. Аналіз лінійних систем в області трансформант перетворення Уолша-Адамара // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування. – 2006. – №33. – С.14 – 23.

9. Рибін О.І., Ткачук А.П. Аналіз лінійних систем в області трансформант кратного перетворення EIWAL // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіоапаратобудування. – 2006. – №33. – С.31 – 38.

10. Рыбин А.И., Ткачук А.П. Анализ линейных систем в области трансформант собственных частот преобразования RTF // Радиоэлектроника. 2006. – №11. – С.56 – 63.

11. Ніжебецька Ю.Х., Рибін О.І., Шарпан О.Б. Підвищення точності ортогональних перетворень для аналізу лінійних систем//Наукові вісті НТУУ«КПІ».2008.№5.С.12 – 18

12. Ильясова Ю.Х., Шарпан О.Б. Анализ линейных систем в области преобразования RTF при неминимальных разностных уравнениях // Вісник НТУУ «КПІ». Сер. Радіотехніка. Радіо апаратобудування. – 2007. – №35. – С.23 – 29.

13. Ніжебецька Ю.Х., Наталенко С.С. Аналіз лінійних систем з використанням перетворення RTF // 3-й Международный радиоэлектронный форум «Прикладная радиоэлектроника Состояние и перспективы развития.» – том 4. «Актуальные проблемы биомединженерии». – Харків. – 22 – 24 жовтня 2008р.

14. Ахмед Н., Рао К. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов // Пер. с англ. Под общ. ред. И.Б. Фоменко. – М. : Связь, 1980, 248с.

15. Pratt W.K. Digital Image Processing. J. Wile & Sons – 1991, v. 1,2.

*Рибін О.І., Ніжебецька Ю.Х., Рыбина І.О. Аналіз лінійних систем з використанням кратних перетворень. Запропонований алгоритм застосування дискретного оператора кратного перетворення для аналізу проходження сигналів через лінійні системи. Ключові слова: кратне перетворення, ортогональне перетворення, алгоритм, спектр, лінійні системи.*

*Рыбин А.И., Нижебецкая Ю.Х., Рыбина И.А. Анализ линейных систем при использовании кратных преобразований. Предложен алгоритм использования дискретного оператора кратного преобразования для анализа прохождения сигналов через линейные системы. Ключевые слова: кратное преобразование, ортогональное преобразование, алгоритм, спектр, линейные системы.*

*Rybin O.I., Nizhebetzka Y.Kh., Rybina I.O. Analysis of the linear systems with the use of multiple transform. The algorithm of the use of discrete operator of multiple transform is offered for the analysis of the signal pass through the linear systems. Keywords: multiple transform, ortogonal transform, algorithm, spectrum, linear system.*